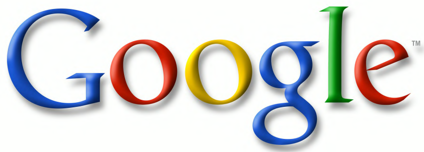
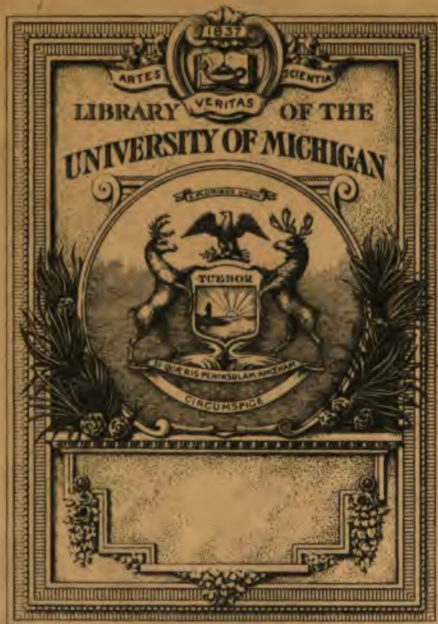



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

DE NUMERIS LIBRI DUO

DE NUMERIS LIBRI DUO

AUTHORE IOANNE NOVIOMAGO

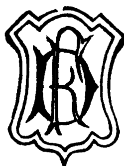
ESPOSTI E ILLUSTRATI

DAL



PROF. G. FRIZZO

DOTTORE IN MATEMATICA



F.lli DRUCKER

VERONA — LIBRERIA ALLA MINERVA | *PADOVA* — LIBRERIA ALL' UNIVERSITÀ

1901

Pavia 1901 — Premiata Tipografia Fratelli Fusi.

A mia moglie, Adele Bianchi,
d'ogni mia buona opera
costante ed efficace inspiratrice.

INDICE

AL LETTORE

> **Man fasst die schwierigsten Partieen einer Wissenschaft leichter, wenn man die Stufen kennt, auf welchen man dazu gelangt ist.**
> **Dr. H. Suter.**

Mentre nella biblioteca comunale di Forlì ricercavo materiali per la *Storia della Matematica*, a cui attendo da molti anni, mi venne fatto di trovare un volume, segnato nel catalogo come *raro*, nel quale sono insieme rilegate per opportunità cinque opere diverse, scritte in un latino corrotto e tutte pubblicate nel secolo XVI. — Questo volume, ricoperto di sdruscita pergamena, presenta nelle sue pagine ritagliate un'altezza ridotta di centimetri 14,70 ed una corrispondente larghezza di centimetri 9,60.

*
* *

La prima di queste opere porta nel frontespizio la seguente dicitura: « *Joachimi Ringelbergii Antuerpiani, Institutiones Astronomicæ ternis libris contentæ. Quorum primus spheræ ac mundi naturam declarat : secundus orbium : tertius circulorum. — cum annotationibus et indice — Basileæ apud Valentinum Curionem. — Anno M. D. XXVIII* ».

1

Il testo di quest' opera si compone di 89 pag. numerate, dopo le quali 2 ve ne sono per il frontespizio e per la trascrizione di una poesia di Ovidio (*in libris Fastorum*) e 4 per la prefazione diretta allo *splendidissimo viro inclytæ Agrippinensis Coloniæ Consuli Joanni a Riedt.* — Dopo le 89 pagine numerate, se ne trovano alcune altre non numerate, e precisamente 1 pagina per l'*errata,* 11 per l'indice e 3 per la trascrizione di due poesie relative agli argomenti considerati. Il libro termina con una carta, di cui la prima pagina è bianca, mentre nella seconda sta un fregio inciso in legno (1).



La seconda di queste opere porta scritto nel frontespizio: « *Elementale geometricum, ex Euclidis Geometria, a Joanne Vœgelin, Haylpronnensi, ad omnium Mathematices studiosorum utilitatem decerptum — Gerardus Noviomagus lectori :*

(1) È un compendio di tutte le nozioni astronomiche conosciute nel secolo XVI, nel quale l'opera fu pubblicata. Questo compendio si compone di tre libri: Il primo libro comprende 13 capitoli, il primo dei quali porta per titolo: « *Quod inter Astronomiam Astrologiamque intersit* ». (Quale differenza corra fra l' Astronomia e l'Astrologia); Il secondo libro comprende 36 capitoli, il primo dei quali porta per titolo: « *Duplex mundi dissectio* » (Duplice ripartizione del mondo). Il terzo libro comprende 30 capitoli, il primo dei quali porta per titolo: « *Circulorum in signa, gradus, (sive parteis) et minuta dis-*

Quid punctum, quid linea, circulus, angulus, orbis
Designet, paucis hæc elementa docent.
Sydereos cursus hinc disces, ut venerere
Patrem, qui terras condidit, astra, polos.

E al termine della pagina: *Argentorati, apud Christianum Egenolphum. An. M. D. XXIX* ».

Tutta l' opera, compreso il frontespizio, consta di 56 pagine, l' ultima delle quali è bianca (1).

*
* *

Sul frontespizio della terza opera sta scritto: « *Adversus ignaviam eorum, qui litteras humaniores negligunt, aut contemnunt, eo quod non*

---

sectio ». (Ripartizione dei circoli in segni, gradi o parti, e minuti). Il *segno* era la dodicesima parte del circolo, ognuna delle quali comprendeva 30 gradi ed ogni grado 60 minuti.

Che cosa intenda trattare l'A. in questo suo scritto risulta principalmente dal capitolo II del libro primo, che porta appunto per titolo: « *Quod Astronomiae subiectum sit* ». (Quale sia il soggetto dell'Astronomia). Eccone la traduzione letterale. « I dialettici, in qualsivoglia disciplina, chiamano *soggetto* ciò, « a cui ordinariamente devono riferire i precetti di tutta intera « l'arte. Per la qual cosa, come il soggetto nella Grammatica « è l' elocuzione latina, nella Dialettica l'argomentazione, nella « Retorica l'eloquenza, nell'Aritmetica il numero, nella Mu- « sica il ritmo dei suoni, nella Geometria la grandezza, così « nell'Astronomia, di cui qui si tratta, il soggetto è la grandezza « insieme al rapporto del moto. Perocchè questa scienza con- « sidera non soltanto la misura degli astri, ma ancora dei « medesimi l' orbita ed il movimento ».

(1) Non è altro che un estratto delle più importanti proposizioni contenute nei primi sei libri degli Elementi di Euclide fatto con intelligente discernimento dall'A. il quale nella

sint de pane lucrando. Declamatio in Academia Heydelbergensi sub promotionem XIIII Magistrorum pronunciata XV. Cal. Martij. — Anno M. D. XXX — Authore Joanne Sinapio ».

Tutta l' intera opera comprende 40 pagine, nell' ultima delle quali sta scritto: « *Haganoæ in officina Joan. Secerii. Anno M. D. X.X.X. Mense Martio* ». Segue ancora una carta, della quale la prima pagina porta incisa una testa di Giano bifronte, la seconda è bianca (1).

---

dedica del libro all'*Eminentissimo viro Georgio Tanstetter Collimitio* scrive: ... *ex Euclidis Geometria eas dumtaxat excerpsi Propositiones, quae in demonstrationibus linearibus crebrius observantur, quaeque satis prope sunt ad disciplinarum culmen perducere. In quibus ordinandis pariter ac demonstrandis, prudens non semel ab Euclide dissentio: Ita enim rei brevitas et, quam semper quaesivi facilitatem, postulabant.* Tutta l'opera è ripartita in 3 capitoli. Il primo, che tratta delle linee rette e delle figure rettilinee, dopo le definizioni, comprende 28 proposizioni, l'ultima delle quali è il celebre teorema di Pitagora. Il secondo, che tratta dei circoli, dopo le definizioni, comprende 12 proposizioni, nell' ultima delle quali è proposta la circoscrizione di un circolo ad un triangolo qualunque: « *Cuicumque triangulo circumscribere circulum* ». Il terzo, che tratta dei rapporti e delle proporzioni, dopo le definizioni, comprende 6 proposizioni; e finalmente il capitolo quarto, che tratta della proporzionalità, comprende 8 proposizioni.

A proposito poi di questi due ultimi capitoli, composti con una non lodevole rapidità, giova prima di tutto osservare che essi non brillano certo per l'aureo splendore puramente geometrico, che magistralmente riluce nell'opera immortale d'Euclide.

(1) È un'eloquente e vibrata invettiva contro coloro che dis-

La quarta opera è appunto quella che mi prese vaghezza di pubblicare ed illustrare, perchè in forma scultoria riporta e a volte commenta i precetti di Pitagora e di Euclide che, in mezzo a considerazioni spesso inopportune, gettano ancora un insolito splendore intorno alla plastica costruzione dei numeri e alle fondamentali proprietà che derivano dalla loro particolare struttura. — Questa opera sfortunatamente manca del frontespizio e di alcune successive carte che sarebbero state segnate al margine inferiore con A . A_2 . A_3 . A_4 . A_5, di cui diremo in seguito in forma più particolareggiata, ed incomincia con la pagina segnata inferiormente con B, in testa alla quale sta la seguente dicitura: « *Arithmeticae liber primus qui est de*

---

prezzano lo studio delle lettere, perchè direttamente non offre, nella maggior parte dei casi, guadagni materiali, la quale termina con questa splendidissima perorazione diretta ai giovani studiosi: « *Inclytas ergo litteras et ingenuas artes, nobilissimasque disciplinas, quibus nihil neque augustius, neque admirabilius in rebus mortalium divina providentia terris dedit, obvijs ulnis, alacri fronte, toto pectore, dies et noctes amplectamini, colite, veneremini, sequamini. Quae solae vobis nunquam intermorituram gloriam et laudem, et apud praesentes et apud posteros parient. Solae famam, nomen, authoritatem, dignitatem, decus, conciliabunt et augebunt. Solae patriae vestrae praesidio, civibus vestris auxilio, parentibus solatio, cognatis et affinibus gaudio, decori et utilitati, toti familiae vestrae honori et ornamento. Vobis denique ipsis perpetuae synceraeque delectationi voluptatique futuræ sunt* ».

Logistica seu de arte computandi. — Authore Joanne Noviomago. ». Il testo dell' opera, come presto vedremo, vi è completamente conservato, comprendendo il primo libro, con la deficienza precedentemente notata, pagine 69 ed il secondo pagine 35, l' ultima delle quali è bianca.

*
* *

La quinta opera, con cui termina il volume rilegato, porta scritto nel frontespizio: « *Joannis Martini Poblacion de usu astrolabij compendium* — 1527. — *Vænit apud Nicolaum Sauetier, calcographum, in vico Carmelitarum, sub homine Sylvestri. — Virescit vulnere virtus* ».

Nella carta, segnata col numero 2, incomincia il compendio per l'uso dell'astrolabio, svolto in 33 proposizioni, dopo una specie di introduzione, nel primo trattato, ed in 12 proposizioni nel secondo trattato. — Questo libro complessivamente comprende 19 carte pari a 38 pagine, sull'ultima delle quali si legge: « *Compendij usus Astrolabi Finis. — Excussum Parisijs apud Nicolaum Sauetier, morantem in vico Carmelitarum, sub sylvestris hominis intersignio* ». — *Anno 1527* (1).

---

(1) È un compendio nel quale sono esposte le norme per l'uso dell'astrolabio. Questo compendio è diviso in due trattati; il primo, dopo una dissertazione intorno all' utilità dell' astrolabio, comprende 33 proposizioni, in ognuna delle quali è pro-

Ritornando ora alla quarta operetta, ricordata precedentemente, che ho tradotto e che ora pubblico illustrata, devo dichiarare che ho fatto molte ricerche intorno allo scrittore *Joannes Noviomagus*, le quali, se non conseguirono completamente i risultati che io avrei desiderato, recarono però luce sufficiente intorno all' autore del lavoro che ho impreso a considerare.

Nella Bibliografia tedesca che porta per titolo *Rogg. — Handbuch der Mathematischen Literatur — 1830*, il nome *Noviomagus* non è nemmeno citato.

Il *Cantor* (*Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1880-98*, che è l'opera più completa e pregevole che si abbia intorno alla storia delle scienze matematiche) non fa punto menzione del Noviomagus, e altrettanto può dirsi del *Gherardt* nella sua *Storia della Matematica in Germania.*

Nel catalogo della Biblioteca *Vittorio Emanuele* in Roma, sotto il nome *Noviomagus Joannes*, non vi è che una scheda, la quale rimanda a *Beda.* Ho esaminato il richiamo e trovai che si

---

posto appunto un problema che si può risolvere coll'uso dell'astrolabio; il secondo, dopo una introduzione in cui si ricorda la necessità di misurare talvolta distanze o altezze inaccessibili, comprende 12 proposizioni, che riguardano appunto i più semplici casi di misurazione indiretta.

tratta di un' opera così intitolata: *Bedæ Presbyteri Opuscula cum scholijs, ecc. — auctore Joanne Noviomago.* Sfogliando l' opera mi sono accorto che essa conteneva vari scritti del Venerabile Beda, specialmente sulla fisica, sul calendario e sulla cronologia continuata fino al 1531, con illustrative annotazioni di *Giovanni Noviomago.*

Nella Biografia universale antica e moderna, ecc. (Volume VIII, pagina 57. Venezia. Presso Gio. Batta. Missiaglia. MDCCC. XXIII. Dalla Tipografia di Alvisopoli), che ho consultato nella Biblioteca comunale di Verona, ho trovato alcune notizie riguardanti *Giovanni Bronchorst,* notò anche sotto il nome di *Noviomagus,* che egli si è dato in alcune sue opere, perchè era nato a Nimega (latinamente chiamata *Noviomagus*) (1). — Queste notizie concordano con quelle che successivamente trassi dal *Dizionario Biografico universale.* (Firenze — Parsigli Davide, Volume I° pag. 653), dalla *Nouvelle Biographie générale* ecc. (M. M. Firmin Didot Frères, sous la direction de M. le d.r Hoefer., Tome septième, pag. 490, Paris. — MDCCCLXIII) e dal *Grand Dictionnaire universel*

---

(1) Città dell'Olanda, presso la frontiera della Prussia sulla riva destra del Waal la quale conta circa 22000 abitanti. — È celebre per i *trattati di Nimega* (1678-1679) che fecero di Luigi XIV l' arbitro dell' Europa e segnarono l' apogeo della sua potenza.

del XIX siècle. Par M. Pierre Larousse. (Tome deuxième. pag. 1307. Paris 1867).

Giovanni Bronchorst nacque a Nimega nel 1494 e morì a Colonia nel 1570. Professò le matematiche all'Università di Rostock e la filosofia a Colonia; intorno al 1550 fu fatto Rettore della Scuola di Deventer, dalla quale si allontanò per le dissensioni ed i torbidi eccitati nella Fiandra dalla riforma. Riparò in Colonia, dove, come è stato detto, morì nel 1570. — Suo figlio Bronchorst Everardo, nato a Deventer nel 1554, e morto a Leida il 27 Maggio 1627, professò giurisprudenza ad Erfurt ed a Leida.

Segno in ordine cronologico le opere lasciate da Giovanni Bronchorst (*Noviomago*):

1. *De Astrolabii compositione.* — Colonia 1533, in 12.°

2. *Apologia pro identitate auctoris librorum de cœlesti hierarchia cum Dionysio Areopagita, de quo Paulus in Actis Apost.* c. 17.

3. *S. Dionysii Areopagitæ martyrium latine versum* (Traduzione fatta sul manoscritto greco d'un'opera apocrifa) (1).

4. *Scholia in Dialecticam Georgii Trape-*

---

(1) I due opuscoli segnati rispettivamente ai numeri 2 e 3 sono stampati insieme coi commentarî di Dionisio il Certosino sopra S. Dionisio l'Areopagita. Colonia, 1536.

zuntii, adiecto Gilberti Poretani libello de Principiis, interprete Hermolao Barbaro, et suis ad eum scholiis. Colonia, 1536, in 8°; Paris et Lyon 1537, in 8°.

5. *Bedae presbyteri opuscula complura de temporum ratione diligenter castigata.* — Colonia, 1537, in fol.

6. *De numeris libri duo.* 1539 in 12°; 1544 in 12°.

7. *Ptolomaei libri octo de geographia e græco denuo traducti.* — Colonia. 1540 in 12°. (1).

8. *Etymologia Grammaticae latinae.* Deventer, 1550, in 12°. — È stata ristampata parecchie volte.

9. Un'edizione con prefazione dell'*Introductio ad Sapientiam Joannis Ludovici Vivis.* Deventer, 1558, in 12°.

10. *Commentari* su parecchi libri di Aristotele, che rimasero manoscritti.

Sebbene in nessuno degli scritti consultati e precedentemente citati, per un'ommissione veramente incomprensibile, risulti dichiarato il luogo in cui è stata pubblicata l'operetta *De numeris libri duo,* pure è a ritenersi che essa sia stata data alle

---

(1) Questa edizione servì di guida a Mercatore per comporre le sue carte, avendo egli riconosciuto che l'editore aveva realmente tradotto e corretto il suo autore sopra manoscritti greci.

stampe in Colonia, dove, del resto, furono pubblicate tutte le opere del nostro A., meno le ultime due che furono pubblicate nel 1550 e nel 1559 a Deventer, dove egli si era appunto recato verso il 1550.

Precedentemente è stato ricordato che questo lavoro del Noviomago *(De numeris libri duo)* è stato stampato nel 1539 e successivamente nel 1544.

Sebbene la data della pubblicazione non risulti direttamente, perchè, come è stato detto, nell'esemplare in esame manca il frontespizio e l'ultima pagina è perfettamente bianca, pure si può affermare che il libro di cui si tratta è stato realmente composto da Giovanni Bronchorst (e anche la prima volta pubblicato) nel 1539. E per verità, fra i vari esempi riportati dall'A., nella pagina che precede quella segnata al margine inferiore con D, per illustrare la rappresentazione dei numeri colle figure caldaiche, vi è anche il seguente:

Anno a Cristo servatore nato... = 1539.

E non mi risulta che quest'operetta sia stata mai da alcuno tradotta, illustrata o semplicemente esposta, poichè non la ho trovata punto citata in nessuno dei molti libri che ho esaminati.

***

Tutto ciò premesso, dirò schiettamente che, dall'attento esame di quest'opera, io ho ritratto una vera compiacenza dell'animo ed una geniale sod-

disfazione della mente. E per verità, in mezzo a molte distinzioni scolastiche e a svariate mistiche considerazioni, in essa, dopo una lunga esposizione delle maniere diverse adoperate per la rappresentazione dei numeri, si possono ammirare, nel calcolo, insieme cogli ordinari, i procedimenti (per quanto ingegnosi certo meno agevoli) usati una volta specialmente dai Greci e dai Romani, i quali successivamente dalla speciale natura dei numeri derivarono di questi le più importanti e caratteristiche proprietà. Inoltre, non infrequentemente, riguardo al desiderio di rigorosa scientifica esattezza, vi ho trovato confermati alcuni precetti che, sempre, e spesso con fortuna, ho variamente caldeggiati nelle mie pubblicazioni. A questo si aggiunga che, nello studio multiforme delle scienze matematiche, non bisogna mai dimenticare l' aurea osservazione di Bossut *(Essai sur l' histoire générale des mathematiques, I)*: « Si nous possédons aujourd' hui des moyens plus simples et « plus commodes pour arriver au même but, n' en « admirons pas moins ces premiers efforts du génie ».

In testa alla prima pagina, inferiormente segnata B, sta scritto: « *Arithmeticae liber primus qui est de Logistica seu de Arte computandi. — Authore Joanne Noviomago* ». Traducendo letteralmente si ha: « Libro primo dell' Aritmetica che tratta della Logistica, ossia dell' arte di calcolare — Autore

Giovanni Noviomago ». — Questo primo libro comprende successivamente 27 capitoli.

Nel *verso* della carta segnata inferiormente F_3 sta scritto: « *Liber secundus Arithmeticae, qui est de numerorum theorematis* ». Traducendo letteralmente si ha: « Libro secondo dell' Aritmetica che tratta dei teoremi dei numeri ». Questo secondo libro comprende un proemio dedicato al dottissimo uomo D. Andrea Eggerd di Rostoch e successivamente 10 capitoli.

Questi capitoli del primo e del secondo libro, esposti per sommaria traduzione, illustrati con note e commenti, e, secondo il mio intendimento, non soltanto come scientifica curiosità, io presento ora al benevolo ed intelligente lettore.

Prof. dott. G. Frizzo.

GIOVANNI NOVIOMAGO

LIBRO PRIMO DELL'ARITMETICA CHE TRATTA DELLA LOGISTICA, OSSIA DELL'ARTE DI COMPUTARE

CAP. I.

PERCHÈ SI DICA ARITMETICA E COME ABBIA RELAZIONE CON QUASI TUTTE LE SCIENZE (1).

In questo primo capitolo l'A. scioglie un inno all'Aritmetica, che pensa essere stata così chiamata dai numeri *(ἀριθμοί)*, come la Grammatica dalle lettere *(Arithmeticam a numeris esse dictam perinde atque Grammaticam a litteris, satis ex nominis ratione constare arbitror)*.

Successivamente dimostra che l'Aritmetica riesce o utile o necessaria a tutte le arti liberali (2). Non solo, egli scrive, la musica, la geometria, l'astrono-

(1) *Arithmetica unde dicatur ac eam per omnes propemodum artes esse fusam.*

(2) I Romani distinguevano le arti in *liberali* ed *illiberali (sordidae)*; le prime richiedevano in vario grado ed in misura diversa l'applicazione specialmente dell'intelletto, le altre invece avevano soltanto per obbietto principale il guadagno — V. a questo proposito M. T. Cicerone, *De officiis* — *Liber primus* cap. XLIV.

mia, ecc. traggono il massimo vantaggio dall' Aritmetica, ma di questa si giovano anche l'arte oratoria e l'arte poetica, la quale ultima governa la parola col ritmo e col numero determinato di sillabe e tempi (more) *(quae rythmis ac certo temporum ac syllabarum numero orationem astringit).*

L'A. successivamente, dopo avere ricordato che, per gli affari trattati ordinariamente nel civile consorzio, alcune determinate regole di calcolo hanno indubbiamente una ragguardevole importanza, avverte che vi è inoltre una più elevata cognizione dei numeri, senza la quale, come scrive Platone nel libro VII della Repubblica, la mente degli uomini non può conoscere bene addentro l' intima natura delle cose.

Il capitolo termina colle seguenti considerazioni: *Quamobrem si artes ut neque tradi possunt, sine litterarum cognitione, ita inscitia numerorum omnes perturbari ac ignorari est necesse. Errat litteratorum vulgus, qui artem hanc ut sordidam ac sterilem cavillantes, in multis scientiis necessariam esse eam non existimant.* (Per la qual cosa come le arti non possono essere insegnate senza la cognizione delle lettere, così senza la cognizione dei numeri esse riescono necessariamente mal comprese ed ignorate. Ed erra il volgo di quei letterati, i quali, sofisticando, presentano quest' arte come ignobile e sterile e non la reputano per molte scienze necessaria).

Cap. II.

Come si divida l'Aritmetica — da chi fu inventata Relazione della Logistica coll'Aritmetica (1).

L'A. in questo capitolo avverte prima di tutto che, secondo alcuni, l'*Aritmetica* è quella certa Arte per calcolare, la quale comprende le seguenti operazioni: La composizione dei numeri, (che oggi si chiama *numerazione* e l'A. vorrebbe chiamare *rappresentazione*) la moltiplicazione, la divisione, la progressione e l' estrazione di radice, insieme con alcune altre regole speciali destinate a risolvere particolarmente problemi di commercio. — Altri però distinsero nell'Aritmetica due specie particolari: la pratica e la teorica; dissero *logistica* l' aritmetica pratica e *aritmetica teorica* quella che tratta delle proprietà e virtù dei numeri. (*Alij vero duas species fecerunt, theoreticen et practicen, e quibus logisticen practicen dixerunt, et eam quae est de numerorum proprietatibus et effectibus, theoreticen).* — Ma questa speciale distinzione, osserva tosto l' A., manca di ragione e dell' autorità degli antichi scrittori.

---

(1) *Arithmetica quomodo dividatur, a quibus inventa sit, et quomodo ad eam referenda sit Logistice.*

L' A. soggiunge che la Logistica (Aritmetica pratica) differisce essenzialmente dall'altra specie di Aritmetica, la quale potrebbe anche essere chiamata *speculativa*, e ricorda che queste due specie si distinguono fra loro l'una dall' altra anche per gli inventori, perocchè l' Aritmetica pratica (Logistica) è stata inventata dai mercadanti di Tiro e dai Fenici, per il baratto delle merci e per i contratti commerciali, mentre l' Aritmetica teorica (Aritmetica propriamente detta), astrusa cognizione dei numeri, che ha per fondamento quasi tutte quante le scienze, è stata scoperta non già dai mercadanti, ma dai filosofi. *(Nam hanc Foenices et Tyrij Mercatores, propter rerum commutatationem et hominum contractus excogitarunt, illam astrusam vero numerorum cognitionem, quae universa fere sapientia nititur, non Mercatores sed Philosofi invenerunt).*

Fra questi filosofi inventori dell' Aritmetica teorica l'A. ricorda ordinatamente Pitagora, Archita, Platone, Eratostene, Euclide, Filolao, Archimede, i quali, aumentando progressivamente le precedenti scoperte, composero tale una somma di cognizioni, che, applicata a fatti per natura diversi, generò discipline differenti, come la musica nel canto, la ritmica nella ordinata combinazione delle sillabe e, nel cielo, la calcolata determinazione, giorno per giorno, del sorgere e tramontare delle stelle, ecc.

(quae deinde in alias rerum naturas translata, plures ex sese disciplinas procreavit veluti in cantibus musicam, in syllabarum coniunctionibus Rithmica, in coelo stellarum exortus et occasus in singulos dies computationes, aliaque innumera eius generis).

Cap. III.

Uso ed utilità dell' Arte del Computare.

L'A. in questo capitolo ricorda prima di tutto che, per quanto è stato detto precedentemente, la Logistica non deve essere considerata come arte poco pregevole. — Gli studiosi devono considerare attentamente le proprietà dell' una e dell'altra disciplina e la loro essenziale differenza, senza apprezzare meno di esse due quella che eventualmente si possa imparare più agevolmente. — Osserva inoltre l' A. che, come si devono astenere dal leggere coloro che non conoscono la virtù e l' efficacia delle lettere, così non potranno interpretare moltissimi passi di svariati ottimi scrittori coloro che non abbiano dimestichezza coll' arte del numerare. — Il capitolo finalmente si chiude con questa osservazione: *tum ad ipsam quae proprie arithmetica dicitur viam sternit, neque enim frustra a Platone vetitum est,*

ne quis numerandi imperitus ad se accedat. (Nello stesso tempo essa *(la logistica)* spiana la via a quella disciplina che propriamente si chiama *aritmetica*, per la qual cosa Platone molto giustamente esigeva che a lui non dovesse avvicinarsi alcuno inesperto nel numerare) (1).

Cap. IV.

Che cosa s'intende per Logistica e come essa differisca dall' Aritmetica.

L' A. in questo capitolo continua ad illustrare più accuratamente, ed anche con opportuni esempî, la differenza che corre fra l' Aritmetica propriamente detta e la Logistica, la quale ultima essenzialmente è l' arte che insegna a trovare un numero ignoto, essendo proposti uno o più numeri conosciuti. Per esempio: Quanti sono i versi dell' Iliade di Omero trascritta in 60 pagine, ognuna delle quali comprende

---

(1) Per l' esattezza devo invece ricordare che, secondo la tradizione, sulla porta della scuola Platonica era scritta questa sentenza: « *μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτο μοῦ τὴν στέγην* ». (*Tzétès.* Chiliades, VIII, 972) — *nessuno ignaro della geometria entri sotto il mio tetto* —, sentenza che corrisponde essenzialmente all' altra ricordata da Plutarco: « *τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν* » (t. VIII. pag. 866 — edit. de Reiske).

70 versi? — oppure: Quanti sono i jugeri contenuti in un campo lungo per ogni verso 60 passi?

A questo proposito il nostro A. osserva molto giustamente che in tutte le questioni proposte (problemi) deve essere dato almeno un numero avente col numero richiesto determinate relazioni, per le quali si possa determinare il numero, oppure i numeri, che ancora non si conoscono. Così, ad esempio, se si domanda: Quanto dista da qui Roma? oppure: Quanto dista Cartagine?, avremo dei problemi che la Logistica non sa risolvere, se simultaneamente non sia dato qualche altro numero, secondo la proporzionalità del quale coi numeri dati bisogna risolvere il problema proposto *(e quo iuxta analogiam quaesitum sumere oportet).*

Il Capitolo termina con la enumerazione di alcuni problemi che non sono ordinariamente considerati nella Logistica, ma nell' Aritmetica propriamente detta. Ad esempio: *Quomodo quadratum aut cubum geminare oporteat, aut quaė sit septenarij vis in climacterico, quas (quaestiones) ex interiore numerorum proprietate oportebat eruere.*

*
* *

Osservazione. — Da tutto quello che è stato riportato fino ad ora traspare che l'A. con la parola *Logistica* vuol significare quella parte della Matematica, che oggi chiamiamo *calcolo* o semplicemente *aritmetica ordinaria,* mentre con la parola *Aritme-*

tica intende significare quella parte della Matematica, che oggi chiamiamo piuttosto *aritmetica generale* e considera principalmente le proprietà dei numeri, per la qual cosa potrebbe anche essere chiamata *Dottrina* o *Teoria dei numeri.*

Cap. V.

Parti della Logistica altrimenti dette: Specie.

L'A. in questo capitolo ricorda che i più recenti scrittori divisero la Logistica in sette specie: la numerazione, l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, la progressione e quella operazione che chiamano estrazione di radice. Secondo l'A. le ultime due operazioni appartengono piuttosto all' aritmetica propriamente detta, mentre le altre, non come specie del calcolo, ma gli sembrano doversi riguardare come parti od uffici *(reliquae vero non mihi species numerandi videntur, sed partes seu officia).* — E conclude: A quella medesima maniera che l' elocuzione e l' invenzione non si direbbero correttamente specie, ma parti od offici della Retorica, così queste non specie, ma saranno parti od offici della Logistica. *(Quemadmodum inventio, locutio non recte species Rethoricae dicerentur, sed partes seu officia, itaque et hae non recte species, sed officia aut partes erunt).*

CAP. VI.

ARTE DEL COMPUTARE — PARTE PRIMA DETTA DA ALCUNI NON ESATTAMENTE: NUMERAZIONE (1).

L'A. in questo capitolo prima di tutto avverte che alcuni chiamano *numerazione* la prima parte della Logistica e ne dànno la seguente definizione: La significazione di un qualsivoglia numero concepito o proposto, per mezzo di figure chiamate *cifre*. *(Numeri concepti sive proposti per figuras, quas ziphras vocant, assignationem)* (2). Secondo l' A. in tutto ciò vi ha errore e per la denominazione e

---

(1) *De prima parte Computandi, quam alij Numerationem vocant non recte.*

(2) I simboli volgarmente adoperati per rappresentare i numeri, in origine, tanto nella lingua latina quanto nella lingua italiana, erano chiamati *figure*, come del resto anche il nostro A. abitudinariamente li chiama. Leonardo Pisano, ad esempio, nel suo primo capitolo del *Liber Abaci*, composto nel 1202, pubblicato a Roma dal Principe Baldassare Boncompagni nel 1857 (Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche) scrive: *Novem figurae Indorum haec sunt:* 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. *Cum his itaque novem figuris et cum hoc signo* 0, *quod arabice* ZEPHIRUM *appellatur, scribitur quilibet numerus.* E Paolo Dagomari (detto Paolo dell'Abbaco, matematico del secolo XIV) nella prima delle sue *Reguluzze* (ripubblicate ed illustrate dal *Prof. G. Frizzo, dott. in Matematica*, Verona, 1883) scrive: *Se vuoli rilevare molte figure, a ogni tre, farai un punto,.....* — Giorgio Valla, che morì nel 1499 o nei primi giorni del 1500, nel cap. 1. del libro III. della sua grande opera enciclopedica: *De expetendis et fugiendis rebus*, scrive: *sunt figurae quidem*

per il concetto, perchè la parola *numerazione* che deriva da *numero*, comprende non una sola ma tutte quante le parti della Logistica e per conse-

---

elementorum hujusmodi: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.... — E Luca Paccioli, morto a Firenze poco tempo dopo aver dedicato nel 1502 la sua *Divina proportione* a Soderini, gonfaloniere perpetuo della Repubblica (LIBRI — *Histoire des Mathematiques en Italie.* t. II. pag. 210, nota 2), nella sua opera principale *Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni e proportionalità,* dedicata al Principe Guido Ubaldo Duca d' Urbino (Venezia, — Paganino de Paganini, 1494 — ristampata dal medesimo in Toscolano sulla riva del Benaco, nel 1523) (*) adopera in questo senso costantemente sotto forma italiana la parola *figura.* — La parola *cifra* (latinamente *tziphra, ziphra, siphra*) con lo speciale significato di *figura* si trova adoperato molto più tardi e probabilmente deriva dalla voce araba *sifr o syfr* (vuoto) che originariamente significava *zero,* il quale nelle lingue occidentali fu poi successivamente chiamato *zephirum, tziphra (o tzyphra), cifra, chiffre, cipher,* cambiando gradatamente significato per prendere l'attuale di *cifra* (figura), fatta eccezione per la parola inglese *cipher* che conservò il suo significato originario. — Da quanto è stato detto risulta che se le strane trasformazioni delle parole nei loro successivi significati dovessero sempre avere una ragione, sarebbe pienamente giustificata la seguente osservazione del P. PIETRO COSSALI: « Il perchè è un abuso contro l' etimologia il chiamare gene« ralmente *cifre* le numerali figure, essendo singolar nome « della figura o del segno del nulla ». (*Scritti inediti.* — pagina 364, Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1857).

(*) Intorno a queste due edizioni molto rare dell' importantissima opera di F. Luca Paccioli gli istoriografi hanno commesso varie inesattezze, affermando che furono stampate tutte e due a Venezia, oppure l'una a Venezia e l'altra a Brescia. L'errore probabilmente deriva dal fatto che Paganino de Paganini era di Brescia. — Intorno alla questione vedi specialmente il Tomo IV del *Bollettino delle Scienze Matem. ecc.* del Principe Boncompagni. Anno 1871, pag. 78-81.

guenza esprime tutta intera la disciplina. — L'A. osserva inoltre che i numeri non si esprimono soltanto con quei simboli stranieri che soglionsi chiamare *cifre* (1. 2. 3..... 0), ma in molte altre maniere, come ad esempio colle lettere dell' alfabeto greco o latino, oppure con uno strumento composto di linee equidistanti e piccole pietre sovrapposte, (donde all'arte del computare venne e rimase il nome di *calcolo)* (1) od anche con una particolare disposizione delle dita, ecc. — Per tutte le ragioni esposte, l' A. reputa che a questa parte della Logistica convenga più giustamente il nome di *rappresentazione* che non quello di *numerazione. (Atqui his omnibus rectiùs notationis nomen convenire arbitror, quam numerationis).*

CAP. VII.

CHE COSA S' INTENDA PER NUMERO — COME SI DIVIDA MANIERE DIVERSE DI ESPRIMERE I NUMERI (2).

L' A. in questo capitolo afferma prima di tutto che il *numero* è una collezione multipla di unità, la quale procede naturalmente all' infinito, perchè

(1) Si accenna ad una *tavoletta per contare* (abbaco), di cui sarà particolareggiatamente detto in appresso.

(2) *Numerus quid sit et quomodo dividatur et de varia ratione notandi numeros.*

quando, continuamente contando, siamo giunti al numero *dieci*, possiamo dopo di questo con una nuova unità comporre un altro numero e così indefinitamente. — *idque non toties quin saepius fieri potest* (e questo non tante volte che non si possa fare ancora più spesso).

Successivamente l'A. distingue i numeri in *digiti*, *articoli* e *misti*. — Sono *digiti* i numeri più piccoli del dieci; si chiamano *articoli* quelli che sono divisibili per dieci come X, XX, XXX,.. C, CC,.. M. ecc; tutti i numeri articoli, considerati nella serie naturale dei numeri, distano progressivamente uno dall'altro di dieci; si chiamano finalmente *misti* i numeri maggiori di dieci, che non sono divisibili per dieci, come XV, CII, MVII ecc., *quos in decem desecare nequimus* (1).

(1) In *Luca Paccioli* (op. cit. carta 19) è scritto: I filosofi intendono per *digito* ogni quantità minore di dieci, per *articulo* ogni numero che in dieci eguali parti si può dividere, sicchè non vi resti alcuna cosa come 10, 20, 30, ... , per *composito* (il *misto* di Noviomago) intendono il numero che consta di digiti e di articuli, come 12, 13, 23, . . . ecc. — *Teone* di Smirne (nato verso il 120 e morto verso il 180) si può considerare come colui che più di ogni altro concorse cogli scritti a diffondere intorno ai numeri le idee pitagoriche; egli ci lasciò un'*Aritmetica*, di pregio molto discutibile, pubblicata nel 1647 da *Boulliau* con una traduzione latina e note corrispondenti, nella quale per una lunga serie di capitoli sono successivamente esposte le varie distinzioni scolastiche dei numeri. — Tra queste però non ho riscontrato la distinzione dei numeri in *digiti*, *articoli* e *misti*.

L'A. soggiunge che i numeri talvolta vengono significati con la parola *(numerazione parlata)*, tale altra con le lettere *(numerazione scritta)* — *hos (numeros) aut voce viva efferimus aut scripto notamus.*

L' A. finalmente chiude il capitolo avvertendo che i numeri si possono anche rappresentare con delle pietruzze (sassolini) o, come ora si usa, con delle monete poste con legge determinata sopra o fuori di linee parallele, tracciate da sinistra a destra, così ad esempio la figura a destra rappresenta il numero centoventisette — CXXVII (1).

(1) Questa maniera di rappresentare i numeri deriva, e con evidente progresso, dalla *tavola per contare* adoperata dai Greci sotto il nome di *ἄβαξ* o *ἀβακίον*, e dai Romani sotto il nome di *Abacus* (abbaco), a cui è stato brevemente accennato nella nota (1) a pag. 6 del precedente capitolo.

Friedlein nella sua pregevole opera intitolata: *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer* (Erlangen, 1869, pag. 132 e seg.) afferma che i Greci, per effettuare i calcoli, adoperavano una piccola tavola chiamata appunto *ἄβαξ* o *ἀβακίον*, vale a dire ciò che non ha base o sostegno (*βάσις*), secondo l'*Etymologicum magnum*, sopra la quale il valore dei numeri era rappresentato da piccole pietre, da sassolini (*ψῆφοι* — *calculi*, donde le voci *calcolo* e *calcolare*) — Nel 1846 a Salamina è stata trovata dal sig. Rhangabè una tavola di marmo rettangolare, successivamente illustrata da Letronne e Vincent (*Revue archéologique*, 3e année, pag. 295 e seg.), la quale era

Si hanno ancora certe curiose figure risultanti da linee fra loro combinate con prestabilito accorgimento, le quali si adoperano per esprimere tutti quanti i possibili numeri; così ad esempio: |___ significa *uno*, ┌── significa *dieci*, ___| significa *cento*, □|___ significa *nove*, ecc.

---

certamente destinata al calcolo come afferma CANTOR (*Matematische Beiträge zum Culturleben der Völker.* — Halle, 1866, pag. 137 e seg.) Altri esemplari consimili furono successivamente scoperti in luoghi diversi e sembrano a questo medesimo scopo essere stati adoperati nell'antichità.

I Romani, per i loro calcoli, adoperavano un tavolo di metallo chiamato *Abacus*, sulla superficie del quale, entro a distinte scannellature, scorrevano dei bottoni i quali esprimevano un determinato valore numerale quando erano collocati da una certa parte della scannellatura. (v. CANTOR — op. cit. pag. 138; MARQUARDT — *Röm. Alter.*, tom. V, pag. 100; FRIEDLEIN op. cit. pag. 22). — Del resto tavole per contare, essenzialmente simili alle precedenti, erano molto in uso anche in Germania nel secolo XVI, dove l' istruzione nel calcolo era impartita prima sopra le linee e successivamente con la penna, vale a dire adoperando le cifre. (vedi HANKEL, pagina 52). — E le adoperano anche presentemente per i loro traffici i Chinesi presso i quali sono chiamate *Sudn—phudn* (*Sudn* = calcolo, *p'hudn* = tavola) ed i Russi, presso i quali sono chiamate *Stschjotü*. — L' HANKEL alla pagina 54 del suo pregevole lavoro: *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig., 1874), scrive: « *Geübte chinesische Rechner agiren mit den vier Fingern der rechten Hand auf ihrem Rechenbrette, vie auf einem musikalischen Instrumente und greifen ganze Zahlenakkorde* » (Abili calcolatori chinesi operano con le quattro dita della mano destra sopra la loro *tavola per contare*

I numeri finalmente si possono anche significare con una speciale disposizione delle dita (numerazione dattila) che si effettua *digitis in sese et ad alios coeuntibus*, e di cui sarà detto in forma più particolareggiata nei successivi capitoli XIII e XIV.

Osservazione. — Giova avvertire che l'idea di numero, per la definizione precedentemente riportata dal nostro A., come anche per la definizione data da Euclide nel suo 7° libro, risponde essenzialmente al concetto di *pluralità* escludendo quello di *unità*.

---

come sopra uno strumento musicale e ne traggono interi accordi numerici). — Nella medesima pagina l'Hankel ricorda che il generale Poncelet, il quale conobbe questa specie particolare di tavola numerale in Russia, quando vi fu prigioniero di guerra, ebbe la felicissima idea di importarla per l'insegnamento nelle scuole elementari francesi, dove prese il nome di *boullier;* introdotta poscia nelle scuole italiane prese il nome di *pallottoliere*, in quelle di Germania si chiama *Zählmaschine*.

A proposito dell'Abbaco Alessandro Humboldt osserva, e con tutta ragione, che il suo grande valore, sotto il riguardo della storia dell' Aritmetica, consiste nel principio di posizione su cui riposa questo strumento, principio che è poi diventato la base della nostra numerazione scritta.

Ricordo finalmente che oggigiorno la parola Abbaco ha parzialmente perduto del suo originario significato e si adopera per significare un libretto che insegna a far di conto ed ordinariamente contiene le tavole delle quattro operazioni fondamentali.

L' Höfer nella sua *Histoire des Mathematiques* (Paris 1874, pag. 127) tra coloro che più si occuparono dell' *Abacus* degli antichi ricorda: Chasles, Cantor, Friedlein, Nesselmann, Th. H. Martin.

Cap. VIII.

I Romani rappresentavano i numeri con le lettere Valore di queste e modo di usarle (1).

L' A. in questo capitolo ricorda prima di tutto che i Romani, per la rappresentazione dei numeri, adoperano sette simboli o lettere: I. V. X. L. C. D. M. Successivamente, discutendo intorno a quanto affermarono in proposito precedenti scrittori, cerca di esporre la ragione per la quale ciascuna di queste lettere è stata adoperata per esprimere un numero determinato:

Le due lettere C ed M significano rispettivamente *cento* e *mille,* perchè sono appunto le prime lettere delle corrispondenti denominazioni. — Il simbolo I rappresenta l'*unità* per la sua eccezionale semplicità, poichè come l' unità è il principio di ogni numero, così questo segno per la brevità della sua descrizione è il principio di ogni figura. *(Mihi propter simplicitatem notae id factum esse videtur, nam ut unitas omnis numeri est principium, ita ea nota propter brevitatem descriptionis omnis figurae est initium).* — Questo simbolo nella rappresenta-

(1) *Quemadmodum Romani litteris utuntur ad numerorum significationem, et quae earum in singulis sit ratio.*

zione dei numeri si scrive successivamente ripetuto fino al numero *quattro* nella seguente maniera: I. II. III. IIII. — Secondo l'A. il simbolo V, che significa *cinque*, non è nè vocale nè lettera, ma la metà del simbolo X, eliminatane la parte inferiore; e, a sua volta, il simbolo X, che significa *dieci*, deriva dal verbo *decussare*, cioè segare l' uno coll' altro due segmenti rettilinei sotto angoli disuguali, *(quod est hac forma X lineas in transversum dividere)*; ma *decussare* deriva da *decussis*, moneta che valeva *dieci* assi, ed ecco la ragione per cui questo simbolo fu adoperato per significare il numero *dieci* (1). —

---

(1) Secondo vari scrittori il simbolo V, che significa *cinque*, deriva piuttosto dal fatto che esso, con la sua figura speciale, rappresenta la mano levata ed aperta che conta 5 dita ed il simbolo X non sarebbe che la combinazione di due simboli, ciascuno uguale a V, per la qual cosa significa *dieci* — Alcuni, come ad esempio il SUTER *(Geschichte der mathematischen Wissenschaften* — Zürich, 1873, pag. 10 e seg.), riguardano questo segno come una prova che presso i Romani, in opposizione alla numerazione parlata, la quale ha per base essenzialmente il sistema decadico, la numerazione scritta risenta del sistema pentadico o quinario, il quale d'altra parte vige tuttora presso alcuni popoli selvaggi dell' Africa e dell' America. Vedi a questo proposito HUMBOLDT: *Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Sisteme von Zahlenzeichen, etc.* (Crell' s Journal — vol. 4 pagine 205-231), HANKEL (op. cit. pag. 11 e seg.) e SUTER (op. cit. loco cit.)

Del resto che originariamente presso i Greci vigesse nel numerare il sistema pentadico, corrispondente al contare sopra le dita di una sola mano, mentre il decadico corrisponde al con-

Il simbolo L che significa *cinquanta* può essere considerato come la metà della lettera C che significa *cento,* la quale, come confermano codici antichi, una volta scrivevasi nella seguente maniera: [.

Il numero *mille* presso gli antichi scrittori si rappresentava anche con la lettera greca X (*Χιλία* = mille); volendo distinguere l' una dall' altra le due figure X simbolo del dieci ed X simbolo del mille si tracciarono rispettivamente alla destra ed alla sinistra di questa ultima un apostrofo (parentesi), derivandone per naturale deformazione il simbolo (X), la metà del quale ottenuta, conducendo per diritto dall'alto al basso un segmento, si ha una figura molto approssimativamente uguale alla lettera D, che, come metà del mille, esprime appunto *cinquecento.* *(Ejus dimidium videtur esse D, majuscula forma scriptum: ob id si integra mille efficit, dimidiata figurae pars quingenta efficiet).*

---

tare sopra le dita di tutte e due le mani, risulta anche dai seguenti versi di Omero (Odissea, IV. 412-415)

Φώκας μέν τοι πρῶτον ἀριθμήσει....
Αὐτὰρ ἐπὴν πάσας πεμπάσσεται ἠδὲ ἴδηται,
Λέξεται ἐν μέσσῃσι, νομεὺς ὥς πώεσι μήλων.

La parola *πεμπάζειν* si dovrebbe letteralmente tradurre *cinquecontare*, se questa fosse voce italiana. — V. ancora Prof. Dott. G. Frizzo: *L' Insegnamento della Matematica ecc.* (Verona, 1898, pag. 33).

Cap. IX.

Altra maniera di rappresentare i numeri con le lettere meno frequentemente usata (1).

In questo capitolo l'A. scrive: *alias litterarum significationes quibus rarius scriptores utuntur, cujusmodi sunt, et veluti apud veteres atque recentiores eas inveni breviter recensebo*, vale a dire: ricorderò brevemente alcune altre significazioni numeriche delle lettere, di cui meno frequente è l' uso, in qual maniera sieno composte e come io le abbia trovate presso antichi e anche più recenti scrittori. — Ed avverte prima di ogni altra cosa che, secondo l'autore Probo (2), qualunque lettera sopra la quale sia segnato un breve tratto rettilineo esprime precisamente tante migliaja quante unità quella medesima lettera rappresenta senza quel tratto rettilineo, per la qual cosa mentre I, V, C, M significano rispettivamente *uno, cinque, cento, mille*, $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{M}}$ significano rispettivamente *mille, cinque mila, cento mila, mille migliaja.* — Secondo l'A. il sovrapposto segmento rettilineo deriva dalla letterra *m* (mille volte) la quale, per scritturazione accelerata, ebbe successivamente a deformarsi fino ad assumere l'aspetto di una semplice lineetta; come

(1) *De reliquis numerorum notis, e litteris sumptis, quarum usus rarior est apud scriptores.*

(2) *Marco Valerio Probo*, di Berito (1° sec. d. C.), grammatico.

del resto avvenne anche per il simbolo della sottrazione, che originariamente era rappresentato dalla lettera *m* (meno) la quale a poco a poco per successiva deformazione diventò un semplice segmento rettilineo.

L'A. termina poi questo capitolo ricordando che molti numeri venivano anche significati per mezzo di parentesi *(apostrophis)* collocati alla sinistra o alla destra di simboli determinati; così ad esempio: il simbolo (X) significava *mille*, il simbolo (I) significava *cinquemila*, il simbolo I') significava *diecimila*, il simbolo ('I') significava *cinquantamila*, ecc. ecc. (1).

Cap. X.

Valore di ciascuna lettera dell' alfabeto nella rappresentazione dei numeri Sistema ormai fuori d'uso (2).

Non mancarono coloro, scrive in questo capitolo l'A., i quali vollero esprimere con ciascuna successiva lettera dell' alfabeto un numero determinato,

---

(1) Intorno a queste speciali maniere adoperate dai Romani talvolta per esprimere graficamente con forme affatto particolari numeri determinati, v. Hankel (op. cit. pag. 40), il quale afferma, conformemente a Friedlein, che sopra una tavola Romana fu trovato il numero: $|\overline{M}|\ \overline{\text{CLXXX}}\text{DC} = 1\,180\,600$.

(2) *De alia numerorum notatione inusitata per singulas alphabeti litteras.*

come viene ricordato da Beda e da Sacrobosco. Intorno poi a questa particolare maniera di rappresentare i numeri, l' A. dichiara di avere trovato i versi seguenti, che riporta *(de qua numerandi ratione hujusmodi inveni versiculos)*:

« Possidet A. numeros quingentos ordine recto.
Atque trecentos B. per se retinere videtur.
Non plusquam centum C. litera fertur habere.
Litera D. velut. A. quingentos significabit.
Litera ducentos E. quinquaginta tenebit.
Sexta quadrigentos gerit F. qua differt ab alpha.
G. quadrigentos demonstrans cura patebit.
H. designatos numeros dat habere ducentos.
I. C. compar erit. centum sibi jure reposcens.
K. quoque centenos et quinquaginta tenebit.
L. quinquaginta tibi simpliciter retinebit.
M. caput est numeri quia mille videtur habere.
N. noningentos numerum designat habendum.
Vndenos facit O. sic dinosces numerando.
P. similem cum G. numerum monstratur habere.
Q. velut. A. cum D. quingentos vult retinere.
Octingenta dabit R. si quis eam numeravit.
G. vero septenos numeratim significabit.
T. tibi centenos et sexaginta tenebit.
V. semper tibi quinque dabit bene si numerabis.
X. semper denos numeranti dat retinendos.
Y. vult centenos et quinquaginta teneri.
Vltima zeta canit numeros bis mille teneri ».

Cap. XI.

Come i Romani abbiano rappresentato tutti i numeri con le lettere e con la loro ripetizione in serie e in qual modo convenga esprimerli a parole (1).

Hic paucis aperiam (scrive in principio di questo capitolo l'A.) *quo modo Romani litteris septem, de quibus ante diximus, I. V. X. L. C. D. M., omnes numeros brevitatis gratia descripserunt,* vale a dire: Qui esporrò brevemente in qual modo i Romani con sole sette lettere, delle quali abbiamo prima parlato, abbiano saputo rappresentare, con pregevole artificio di celerità, tutti quanti i numeri.

Fatta questa premessa, l'A. così espone particolareggiatamente il sistema di numerazione adoperato dai Romani:

Per significare i successivi numeri dall' *uno* al *mille* (numeri di *primo* ordine) il procedimento è molto facile e non vi è alcuna osservazione da fare: Avremo: I. II. III. IIII. V..... IX. X. XI.... XX.... XXX.... XL. L..... XC...: C.. CC... CCC.... D... DCCC... DCCCC.... M. – In questo sistema di numerazione scritta, per convenzione

(1) *Quemadmodum Romani omnes numeros litteris significarint et de multiplici earum serie, tum qua orationis forma efferri conveniat.*

fondamentale, il numero minore leva al numero maggiore, che segue il primo, tante unità precisamente quante sono quelle che esso rappresenta. Così ad esempio: IV significa *quattro;* IX significa *nove;* XL significa *quaranta ;* XC significa *novanta ;* ecc.

Il secondo ordine incomincia dal numero *mille* = M; il numero minore di mille preposto al simbolo che rappresenta il mille esprime un multiplo del mille secondo il numero preposto; convenzione questa affatto opposta alla convenzione precedente. Le espressioni II M . IV M . XM significano rispettivamente *due mila, quattro mila, dieci mila.* — A questo proposito osserva con breve digressione l' Autore che l' espressione, ad esempio, XCM può significare due numeri molto diversi, secondo che il simbolo X si considera unito insieme col simbolo C, oppure lo si considera solo, indipendente e separato affatto da tutto quello che lo segue: nel primo caso significa *novantamila,* nel secondo caso significa *dieci centinaia di migliaia* (mille volte mille — un milione, (1). — Nel secondo ordine i numeri cre-

---

(1) Secondo l' HANKEL (op. cit. pag. 14) la parola *milione,* che sembra sia stata adoperata dagli Italiani per esprimere una misura concreta (un peso determinato di oro), si trova usata per la prima volta come voce numerale soltanto nel 1494 in un' aritmetica italiana molto diffusa e precisamente nella *Summa de Arithmetica* ecc. di Luca Paccioli, il quale al foglio 18 scrive: *mille migliara che fa secondo el volgo el milione.* (Die « Milion » welche in Italienischen ursprünglich ein concretes Maass, 10 Tonnen Goldes, bezeichnet zu haben scheint, finde ich als abs-

scono per decine di migliaia, come XM, XXM, XXXM, ecc. fino a XCM.

Nel terzo ordine i numeri crescono per centinaia di migliaia, come: CM . CCM . CCCM, fino a DCCCCM. A questo proposito l' A. avverte: α) che vi sono due maniere distinte per esprimere a parole questi numeri; così ad esempio il numero scritto DCCM può essere significato a parole dicendo: *settecentomila* oppure dicendo *sette centinaia di migliaia;* β) che se la dicitura semplice o composta del numero sia trasformata in avverbio e successivamente congiunta col genitivo di *passi*, *monete* o *sesterzi*, rappresentati questi ultimi dalla nota *HS*, e non vi siano interposti altri simboli o numeri, devesi sempre sottintendere CM = centomila, come presso Cicerone

---

tractes Zahlwort zuerst 1494 in einer weit verbreiteten italienischen Arithmetik, etc. e nella nota corrispondente: Paccioli. *Summa. d. arit. fol. 8:* mille migliara che fa, secondo el volgo, el milione).

Del resto il medesimo L. Paccioli nella *Distinzione seconda* dell'opera citata, dopo avere ricordato le nove parti (uffici, specie) dell'Aritmetica e dopo avere diviso i numeri in *digiti*, *articuli e compositi* scrive: « La numerazione è quale usasi in Italia oggidì: numeri semplici, dicine, centinara, miliara, dicine di miliara, centinara di miliara, milioni, dicine di milioni, centinara di milioni, ecc.; donde risulta ancor più chiaramente che Luca Paccioli adoperava con piena e perfetta cognizione la parola *milione* per significare mille migliaia ».

Le parole relativamente moderne *bilione*, *trilione* furono create in principio del secolo XVII. La parola *miliardo*, come voce numerale, fu adoperata per la prima volta nel mondo finanziario francese intorno al 1820.

nella *Pretura Urbana*: . . . . . *quinquies HS*, si deve intendere cinquecentomila sesterzi, oppure cinquecento migliaia di sesterzi.

Il quarto ordine comprende numeri rispettivamente uguali a dieci, venti, trenta, ecc... fino a novanta *centinaia di migliaia*, come ad esempio: X.CM, XXX.CM, ecc. fino a XC.CM. Il più grande numero appartenente a questo ordine è XC.CM.DCCCC.XCIX. M.DCCCC. XCIX, cioè novanta centinaia di migliaia (o nove mila migliaia) novecentonovantanovemila novecentonovantanove e poichè, come abbiamo precedentemente avvertito, mille migliaia è = a un milione, così questo numero scritto in simboli volgari (avverte l' A.), sarebbe = a 9 999 999.

L' A., dopo avere successivamente osservato in particolare che un certo numero, il quale giunge al quarto ordine, può essere significato a parole in due maniere diverse, come ad esempio *ottantacinque centinaia di migliaia*, oppure *ottantamila migliaia e cinque centinaia di migliaia*, insegna in quale maniera questo numero si scriverebbe col sistema volgare, e cioè: 8 500 000.

L' A. continuando scrive: Il quinto ordine comprende numeri rispettivamente eguali a cento, duecento, trecento, ecc., fino a novecento centinaia di migliaia, che nella maniera volgare diventano dieci, venti, trenta fino a novanta mila migliaia (milioni). Per i Greci ogni unità di questo ordine equivaleva a dieci milamiriadi *(myria myriadum)*. Conseguen-

temente il numero CC. CM si può esprimere dicendo: duecento centinaia di migliaia, oppure: venti mila migliaia (milioni), numero che col sistema volgare bisognerebbe scrivere nella seguente maniera: 20 000 000.

L'A. pone termine a questa esposizione con le seguenti parole: *ultra hos non inveni, sed si offerantur, satis me ostendisse puto quomodo aut in notas aut in nostram vulgatam consuetudinem redigi possint* (oltre a questi numeri, cioè a numeri così forti, altri io non ho trovato, ma quando se ne presentassero ancora di più forti, penso di avere sufficientemente dimostrato in quale maniera essi si possano esprimere o coi simboli o nel nostro volgare linguaggio).

Cap. XII.

Rappresentazione dei numeri colle lettere greche secondo il grammatico Erodiano ed alcuni altri che hanno trattato lo stesso argomento (1).

L'A. in questo capitolo premette che è prezzo dell'opera conoscere il procedimento seguito dagli antichi per rappresentare i numeri con le lettere greche

---

(1) *De numeris Graecorum consuetudine per litteras signatis — Ex Herodiano grammatico, alijsque quibusdam eodem spectantibus.*

e soggiunge: *Neque piguit Herodianum Alexandrinum* (1) *hac de re scribere, quem fere ad verbum hic subiecimus, ex libello quem de numeris reliquit.* (Ed Erodiano di Alessandria non isdegnò di scrivere intorno a questo argomento ciò che noi riportammo quasi letteralmente, traendolo da un opuscolo che lasciò scritto intorno ai numeri).

Un *ἰῶτα*, egli dice, significa *uno*, due *ἰῶτα* significano *due* e così fino al *quattro*.

Il *cinque* si esprime con *π*, che è la prima lettera della parola *επέντε*, e vi si aggiunge successivamente un *ἰῶτα* fino al *nove*.

Il *dieci* si esprime con *δ*, che è la prima lettera della parola *δεκα*; il *venti* con *δδ*; il *trenta* con *δδδ* e così di seguito fino al quaranta.

Il *cinquanta* si esprime con un *π* che internamente comprende un *δ*, per la qual cosa si ha il simbolo ΠΔΓ; per esprimere il *sessanta* si scrive in seguito un *δ*, per esprimere il *settanta* due *δ* e così di seguito fino al *novanta*.

Il *cento* si esprime con *η*, che è la prima lettera della parola *ἡκατόν*; il duecento con *ἡἡ* e così di seguito fino al *quattrocento*.

---

(1) Erodiano di Alessandria *(Αἴλιος 'Ηρωδιανός)* fu uno dei più celebri grammatici dell' antichità, il quale visse nel secondo secolo dell' era Cristiana. (v. *Fabricius: Bibliotheca graeca*, vol. VI, pag. 278 e seg. — *Smith, Dictionary of Greek and Roman Biography)*.

Il *cinquecento* si esprime con un π che internamente comprende un η per la qual cosa ne riesce il simbolo |H|, a cui si può scrivere di seguito un $\acute{\eta}$, due $\acute{\eta}$, tre $\acute{\eta}$, ecc. per esprimere rispettivamente il *seicento,* il *settecento,* ecc. fino al novecento.

Il numero *mille* si esprime con X, *duemila* con XX, *tremila* con XXX e così di seguito.

La *miriade,* ossia la decina di migliaia, si esprime con la lettera M.

Tutto ciò premesso, l'A. ricorda anche un'altra maniera adoperata per esprimere i numeri colle lettere greche: Si riparte tutto l'alfabeto greco in tre serie, aggiungendo a ciascuna serie un simbolo speciale, per modo che ciascuna di esse comprende nove figure; la prima serie si estende dall' α al *ἰῶτα,* collocando al sesto posto il simbolo speciale ϛ per poter significare tutti i successivi numeri dall' *uno* al *nove;* la seconda serie si estende dal *dieci* al *novanta,* collocando all' ultimo posto il simbolo speciale *h* rappresentante il *novanta*; la terza serie si estende dal *cento* al *novecento,* collocando all'ultimo posto il simbolo speciale ϡ per significare il *nove cento.* — Colle ventisette figure predette, opportunamente fra loro combinate, si possono rappresentare tutti i numeri dall' uno al novecentonovantanove.

Da quanto precede risulta che i simboli

α . β . γ . δ . ε . ϛ . ζ . η . ϑ

rappresentano rispettivamente i numeri

I . II . III . IV . V . VI . VII . VIII . IX;

che i simboli

$\iota \,.\, \varkappa \,.\, \lambda \,.\, \mu \,.\, \nu \,.\, \xi \,.\, o \,.\, \pi \,.\,$ ϟ

rappresentano rispettivamente i numeri

X . XX . XXX . XL . L . LX . LXX . LXXX . IX;

che i simboli

$\rho \,.\, \sigma \,.\, \tau \,.\, \upsilon \,.\, \varphi \,.\, \chi \,.\, \psi \,.\, \omega \,.\,$ ϡ

rappresentano rispettivamente i numeri

C . CC . CCC . CD . D. DC . DCC . DCCC . CM.

Se a questi simboli si scrive sotto un accento acuto, ogni simbolo esprime allora tante migliaia quante unità semplici esso rappresenta. *(Singulis his litteris si nota toni acuti subijciatur, mille significat toties, quoties ipsa per se unum)* (1).

---

(1) Intorno alla significazione dei numeri colle lettere greche, specialmente per rilevare alcune differenze non trascurabili di grafica rappresentazione, si può consultare con profitto M. Marie (*Histoire des Sciences mathématiques et phisiques.* — Paris 1883. Tom. I, pag. 11 e seg.) ed Hankel (op. cit. pag. 34, 35 e 36), il quale discute specialmente sull'origine dei tre simboli speciali (episemi) aggiunti alle lettere dell' alfabeto greco e rispettivamente nell' ordine delle unità, delle decine e delle centinaia; di questi tre episemi il primo si chiama *στίγμα* ed il secondo *κόππα* e sembrano derivare dalla deformazione di lettere ebraiche, il terzo si chiama *σανπĩ* ed ordinariamente si considera derivato dalla combinazione della lettera π colla lettera τ.

I Greci che, secondo il Marie, scrivendo un *iota* (e secondo il nostro A. un acento acuto) sotto alle nove prime lettere dell' alfabeto, rappresentavano i nove primi numeri delle migliaia, adoperando col medesimo sistema i successivi diciotto simboli avrebbero potuto significare i primi nove numeri di decine di

CAP. XIII.

ANTICA MANIERA DI COMPUTARE, PIEGANDO VARIAMENTE LE DITA.

Questo capitolo può essere considerato quale un esordio, quale una preliminare illustrazione del successivo capitolo XIV, nel quale l' A. espone effetti-

---

migliaia ed i primi nove numeri di centinaia di migliaia; e seguendo il medesimo metodo scrivervi sotto 2 *iota*, 3 *iota*, ecc. (oppure due accenti, tre accenti, ecc.) per esprimere numeri più forti. Ma essi non avevano quasi mai bisogno di adoperare numeri straordinariamente elevati. — Più tardi la miriade (decina di migliaia) rappresentata da *M* o anche da *Mυ* rompe la serie, mentre il numero delle miriadi si sovrapponeva al simbolo *M*, secondo Archimede ed Eutocius, oppure si preponeva al simbolo *Mυ*, secondo Diofanto e Pappo; così, ad esempio, le due espressioni $\overset{\lambda\delta}{M}$, $\lambda\delta M\upsilon$ significano *24 miriadi*.

I Greci non conoscevano nè la figura nè l' ufficio dello zero e quando un numero mancava di unità di un ordine determinato, si ommetteva il simbolo corrispondente a quest' ordine, perchè ogni simbolo della numerazione scritta significava per se stesso il suo valore numerico e l'ordine di unità che esse rappresentava. Per esempio : φξ significa 507.

Chi della numerazione dei Greci nei successivi periodi desidera maggiori ragguagli può con vantaggio consultare ulteriormente CANTOR (op. cit. pag. 121) WOEPKE *(Mém. sur la propagation des chiffres indiens*, etc. pag. 132 e seg.) NESSELMANN *(Die Algebra der Griechen* Berlin, 1842). DELAMBRE *(De l'Arithmetique des Grecs* nel tom. 2° della sua storia dell' Astronomia), A. KIRCHOFF *(Studien zur Geschichte des griechiscen Alphabetes.* Berlin, 1869).

vamente il procedimento da seguirsi per esprimere, secondo il Beda, i numeri con la diversa piegatura delle dita delle mani.

L' A. in questo XIII capitolo, dopo avere dichiarato che questa particolare maniera di rappresentare i numeri col piegamento delle dita fu chiamata dal Beda *loquela delle dita* (1), avverte che gli aritmetici, appunto per questo, chiamano *digiti*

---

(1) *Beda* (il venerabile) nacque a Wearmouth nella Contea di Durham verso il 670 e morì verso il 735. Compose vari scritti ecclesiastici, filosofici, geometrici, astronomici e di aritmetica, dei quali ultimi uno è intitolato *De numeris libri duo*, l' altro *de Numerorum divisione*.

Nella Biblioteca Corsiniana di Roma trovasi un esemplare di un' edizione intitolata: *Bedae presbyteri Anglo-Saxonis, viri eruditissimi, de natura rerum et temporum ratione libri duo* etc. Basileae — MDXXIX). Questa edizione comprende un'opera divisa in 69 capitoli intitolata *De natura rerum*, il primo dei quali è appunto denominato: *De computu vel loquela digitorum*. Un esemplare della medesima edizione si trova presentemente tanto nella Biblioteca Riccardiana quanto nella Biblioteca Magliabecchiana in Firenze. D'altra parte la Biblioteca Marucelliana della medesima città possiede un volume intitolato: *Bedae Presbyteri Anglo-Saxonis Monachi Benedicti, viri litteratissimi, opuscula, complura*, ecc. pubblicato a Colonia nel 1537, nel quale alla carta 69 nel *recto* trovasi la seguente denominazione: *De computu vel loquela digitorum — Caput primum.* — Un' altra pregevole edizione delle opere del Beda sarà ricordata alla nota corrispondente del Capitolo successivo.

Un'edizione poi di tutte le opere del Beda è stata pubblicata dal Giles nel 1843. — *Venerabilis Bedae opera quae supersunt omnia.* Londres, 12 volumi in-8.

i numeri semplici (1) ed *articolati* i numeri composti; e soggiunge che nella storia di Artaserse si legge che Oronte, genero del Re, essendo stato respinto con disprezzo dal suocero ebbe ad esclamare che i sentimenti dei Principi si rivelano simili alle dita degli Aritmetici, perchè, siccome computando, compongono ora le miriadi ed ora le semplici unità, così pure quelli che dipendono interamente dai Re, ora valgono moltissimo ed ora, rimossi dal posto di onore, sono dagli altri scherniti *(nam sicut computando nunc myriada, nunc monada digitorum gestu conficiunt, sic quoque qui a regibus toti pendent, modo valent plurimum, modo ab honoris gradu devoluti, alijs sunt derisui).*

Successivamente ricorda che Quintiliano (2), nel libro IX, parla apertamente di questa particolare gesticolazione delle dita, scrivendo: « il gesto di colui « che versa vino nel bicchiere, o di colui che mi- « naccia percosse, o di colui che col pollice pie- « gato compone il numero cinquecento.... (3) »

---

(1) Nel senso di numeri non superiori al *dieci.*

(2) Quintiliano (M. Fabio) nacque verso il 40 dell'era cristiana e fu uno dei più celebri retorici Romani. La sua più importante opera porta il titolo: *De institutione oratoria libri XII* talvolta anche denominata semplicemente: *Institutiones oratoriae.* In essa sono svolti magistralmente i precetti, seguendo i quali per ragione diretta o indiretta si può diventare valente oratore.

(3) « *...gestum poculum poscentis, aut verbera minantis, aut numerum quingentorum flexo pollice efficientis...* ».

con la quale ultima frase senza alcun dubbio Quintiliano intendeva parlare di questa speciale rappresentazione dei numeri. Infatti il numero cinquecento si esprime appunto con la mano destra, piegando il pollice verso la palma a foggia della lettera greca Γ (1).

Il nostro A. continua affermando che grammatici di gran valore, nella interpretazione degli scrittori, commisero gravissimi errori per non avere conosciuto questa particolare maniera di computare; così avvenne, ad esempio, a Domizio Calderino (2) nello

---

(1) Questa citazione nel testo è seguita dalla seguente osservazione dell' A.: *Iis qui quinquaginta eo loco legunt haec ratio incognita fuit. Nam de dextra manu Quintilianus loquitur.* (Coloro che leggono *cinquanta* ignorano questo sistema di rappresentazione numerale, perchè Quintiliano parla della mano destra ...) A questo proposito però vedi la nota (1) del successivo cap. XIV.

(2) *Calderino Domizio,* filologo, filosofo e matematico del secolo XV, nacque in Torri (Prov. di Verona) l' anno 1446 e morì di contagio a Roma il 1478 — Chiamato a Roma a 24 anni da Paolo II, fu poi segretario apostolico di Sisto IV.

A riprova del suo sapere in filosofia ci lasciò l' Apologia di Platone contro il Trapezunzio — Come filologo fu il primo a cimentarsi coi poeti più difficili ed oscuri dell'antichità e concorse efficacemente al progresso delle lettere pubblicando ottime edizioni di antichi autori con note e commenti, tra le quali giova ricordare *M. Valerii Martialis Epigrammata* (Venezia 1474 in foglio) e *Iuvenalis, Satirae* (Venezia 1475 in fogl.) Secondo il Maffei si dimostra matematico valente nella correzione della Cosmografia di Tolomeo che pubblicò rettificata nell' opera che porta per titolo *Geografia di Tolomeo* (Roma, 1474 in fogl.) ragguardevole specialmente perchè contiene le prime carte incise in rame.

esplicare quel passo di Giovenale *(Satira decima)* in cui, parlando di Nestore, esclama:

Felix nimirum qui per tot secula mortem
Distulit, atque suos jam dextra computat annos.

Ed altrettanto potrebbe avvenire nello interpretare quel passo di Plinio (Libro XXXIV cap. VII della sua celebre opera: *Naturalis Historiae libri XXXVII),* il quale suona così: *Praeterea Ianus Geminus a Numa rege dicatus, qui pacis bellique argumento colitur, digitis ita figuratis ut trecentorum LXV dierum nota per significationem anni temporis et aevi se deum indicaret.* (1).

L' A. termina questo capitolo, avvertendo che vi è un passo in un epigramma di Nicandro (2), nel

---

(1) Il Dio Giano, bifronte, venerato per ragione di pace e di guerra, era preposto all' anno ed alle stagioni e veniva raffigurato in maniera che con la mano destra avesse a significare il numero 300 e con la mano sinistra il numero 65, che insieme compongono il numero dei giorni dell'anno. Del resto tutto ciò è anche ricordato da Macrobio nel cap. 9 del libro I' della sua opera: *Conviviorum Saturnalium libri septem.*

(2) *Νικάνδρος,* poeta greco, medico e grammatico, il quale visse nel 2° secolo prima di Cristo, scrivendo sopra i più svariati argomenti. Fabricius (op. cit.) pubblicò l' elenco delle sue numerose opere delle quali ci rimangono solo due: *Θηριακά* (in 958 versi) *'Αλεξιφάρμακα* (in 630 versi). Questi due poemi furono per la prima volta pubblicati alla fine delle Opere di Dioscoride (Venezia, 1499 in fogl. presso Aldo Manuzio).

quale, scherzando contro una vecchietta troppo vivace, si accenna a questa specie particolare di numerazione coi versi seguenti:

Ἡ πολιὴ κροτάφοισι Κοτύτταρις, ἡ πολύμυθος
γραῖα, δ' ἣν Νέστωρ οὐκέτι πρεσβύτατος
ἡ φάος ἀθρήσασα ἐλάφου πλέον, ἡ χερὶ λαιῇ
γῆρας ἀριθμεῖσθαι δεύτερον ἀρξαμένη (1).

---

(1) A complemento del citato epigramma bisogna trascrivere anche i versi:

Ζώει καὶ λεύσσουσα καὶ ἀρτίπος, οἷά τε νύμφη
ὥστε με διστάζειν μή τι πέπονθ' Ἀΐδης.

Questo epigramma però non è di Nicandro, ma di Basso Smirneo (poeta che visse intorno alla metà del primo secolo dell'era cristiana), secondo quanto afferma la *Epigrammatum Anthologia Palatina* (Vol. II. cap. XI. n. 72 dell'edizione Didot-Dübner, 1872). — Traducendo letteralmente si avrebbe: « Cotittari, la vecchia ciarliera, bianca intorno alle « tempie, per la quale Nestore non era più molto vecchio, « che aveva goduto la luce più del cervo ed aveva incomin- « ciato già a numerare la vecchiaia con la mano sinistra per « la seconda volta, vive sana ancora d'occhi e di piedi, come « una ninfa, per modo che io dubito che l'Ade non ne abbia « in qualche modo sofferto ». — Vedi anche la *Anthologia graeca cum versione latina Hugonis Grotii*, pag. 391-393. — Come vedremo tosto nel capitolo successivo con questa numerazione dattila *(digitali computatione)*, a cui qui evidentemente si accenna, con la mano sinistra si contava fino al cento e con la mano destra dal cento al diecimila; oltre al diecimila si tornava ad adoperare ancora per la seconda volta (*δεύτερον*) la mano sinistra. — A completo schiarimento della precedente traduzione letterale, ricordo che *Κοτύτταρις* o *Κυτωτάρις* è nome di donna e che il cervo era creduto animale di lunghissima vita.

Cap. XIV.

Nuovo sistema di numerazione secondo l'anglo-sassone Beda.

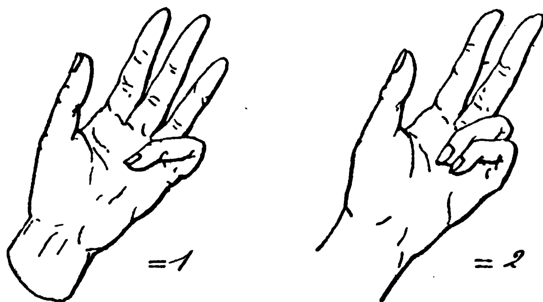
L'A. in questo capitolo incomincia coll'avvertire che questa speciale maniera di rappresentare i numeri sarebbe rimasta certamente sconosciuta ai posteri se non si fosse scoperto un volume dell'eruditissimo scrittore Beda *(De natura rerum et temporum ratione libri duo)*, nel quale si comprende tutta intera questa speciale *χειρονομία*.

Conseguentemente il nostro A. dichiara di voler riportare letteralmente trascritti i precetti del Beda, soggiungendo che molti altri scrittori mostrarono di conoscere questo speciale sistema adoperato per significare i numeri, e fra gli altri S. Gerolamo, il quale lasciò scritto: *Centesimus et sexagesimus et tricesimus fructus quamquam de una terra et de una semente nascitur, tamen multum differt in numero. Triginta referuntur ad nuptias. Nam et ipsa digitorum coniunctio quasi molli se complexans osculo et foederans, maritum pingit et coniugem. Sexaginta vero ad viduas, eo quod in angustia et tribulatione sunt positae. Unde et superiori digito deprimuntur, quantoque maior est difficultas expertae quondam voluptatis illecebris abstinere, tanto maius est praemium. Porro*

centesimus numerus (diligenter quaeso lector attende, de sinistra transfertur ad dexteram) et eisdem quidem digitis, sed non eadem manu, quibus in laeva nuptae significantur et viduae, circulum faciens exprimit virginitatis coronam (1).

Ciò premesso, l'A. svolge in proposito i precetti del Beda nella forma seguente:

Per esprimere *uno* piega il dito mignolo della mano sinistra contro il mezzo del palmo della mano.

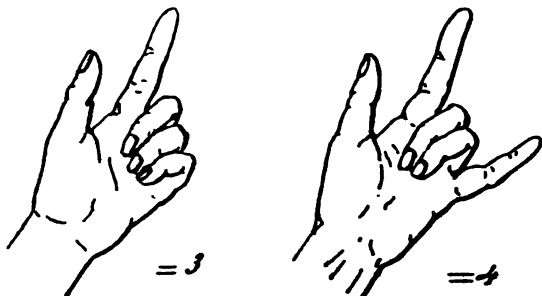


Per esprimere *due* piega nel medesimo modo anche l'anulare (chiamato dai latini *medicus).*

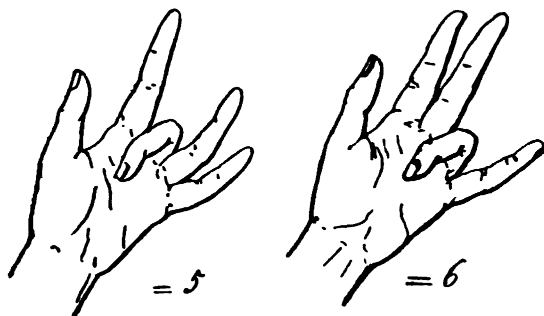
---

(1) V. la carta 8ª numerata della edizione delle opere complete di S. Gerolamo possedute dalla Biblioteca Marciana di Venezia *(Omnium operum divi Eusebii Jeronymi Stridonensis, ecc.)*, edizione composta di nove volumi e pubblicata a Basilea nel 1516. — Vedi anche la pag. 315 del *Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze, ecc.* del Principe Baldassare Boncompagni — tom. I, anno 1868.

Per esprimere *tre* piega nella medesima maniera anche il medio (chiamato dai latini *impudicus*).



Per esprimere *quattro* leva il dito mignolo, lasciando gli altri due piegati come lo erano nella rappresentazione del numero *tre*.

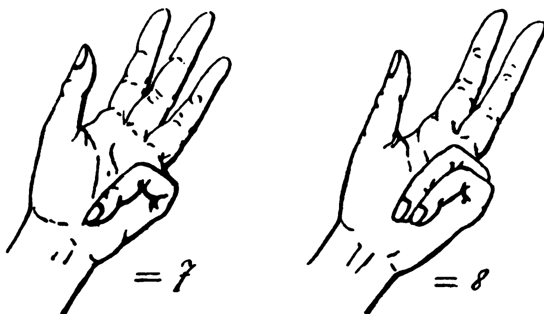


Per esprimere *cinque* solleva analogamente anche l'anulare.

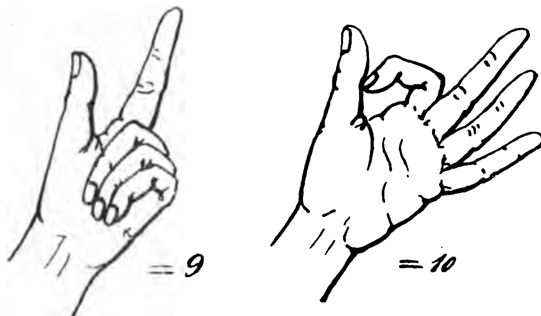
Per esprimere *sei* solleva il medio e piega contro il mezzo del palmo della mano solamente l'anulare (1).

(1) Macrobio, nel cap. 13, libro VII dei suoi *Saturnali*, volendo spiegare per quale ragione solevasi ordinariamente

Per esprimere *sette,* tenendo levati tutti gli altri, piega quanto più è possibile il mignolo, fino a toccare verso il pollice la base del palmo della mano.



Per esprimere *otto* piega nella medesima maniera anche l'anulare.



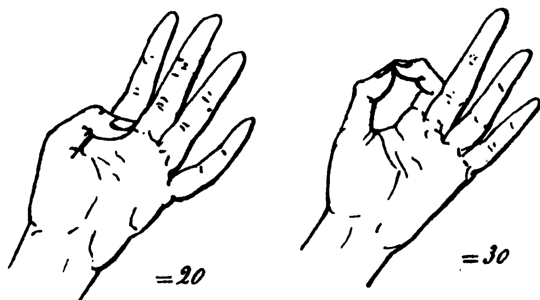
Per esprimere *nove* piega similmente appresso anche il medio.

Per esprimere *dieci* poni l'unghia dell'indice contro la media giuntura del pollice.

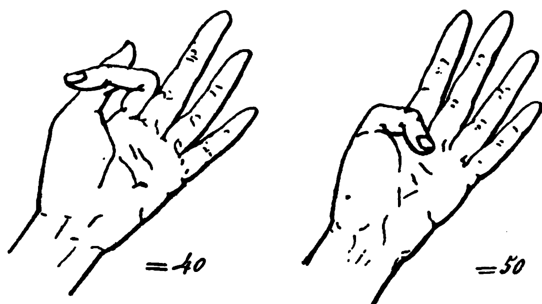
---

mettere l'anello a quel dito, che dai latini era chiamato *medicus*, scrive: Con questo dito rappresentasi il numero 6, che è nu-

Per esprimere *venti* colloca la sommità del pollice fra la radice (base) dell'indice e quella del medio.



Per esprimere *trenta* congiungi in un amplesso dolce le unghie dell'indice e del pollice.



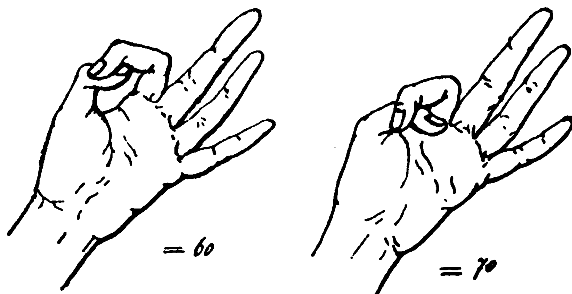
Per esprimere *quaranta* sovrapponi il pollice al lato dell'indice, mantenendo però sollevate ambo le dita.

Per esprimere *cinquanta* inclina verso il palmo della mano distesa il pollice curvato in maniera da rappresentare la lettera greca *Γ*.

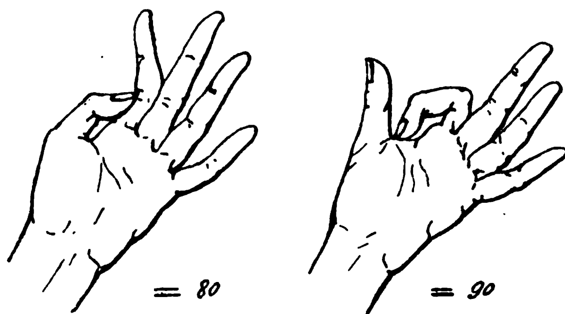
---

mero perfetto e gode di singolari proprietà che non hanno altri numeri; per la qual cosa, in omaggio a questi suoi pregi particolari, usavasi adornarlo dell'anello.

Per esprimere *sessanta* circonda alla sommità, coll'indice ripiegato, il pollice disposto come è stato detto precedentemente.



Per esprimere *settanta* devi introdurre nell'indice, ripiegato come è stato detto precedentemente, il pollice attraverso la media falange dell'indice (1).



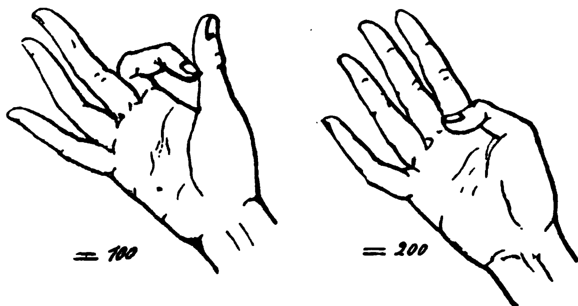
Per esprimere *ottanta* devi collocare l'unghia del pollice disteso contro la media falange dell'indice, ripiegato come è stato detto precedentemente.

---

(1) Vi è una certa differenza fra le due disposizioni delle dita destinate a rappresentare rispettivamente il 60 ed il 70. Tanto nell'uno quanto nell'altro caso l'indice ravvolge il pol-

Per esprimere *novanta* piega l'indice in maniera che l'unghia di questo batta contro la radice (la base) del pollice.

Tutto quanto è stato detto finora si compie adoperando sempre la mano sinistra.



Il numero *cento* si esprime con la mano destra come si esprime il *dieci* con la mano sinistra; il numero *duecento* si esprime con la mano destra come si esprime il *venti* con la mano sinistra; e così di seguito nella medesima maniera fino al *novecento.*

Analogamente *mille* si esprime con la mano destra come si esprime *uno* con la sinistra; *duemila* si esprime con la mano destra come si esprime *due* con la mano sinistra; e così di seguito nella medesima maniera fino al *novemila.*

---

lice, ossia il pollice riempie l'indice circolarmente ripiegato; ma nel secondo caso, quando cioè la disposizione delle dita rappresenta il 70, bisogna spingere il pollice più che si può in modo che la sua unghia resti allo scoperto quanto maggiormente sia possibile, mentre per la significazione del 60 l'unghia del pollice potrebbe anche restare coperta.

Per esprimere *diecimila* colloca la mano sinistra adagiata sul mezzo del petto, in maniera che le dita sieno rivolte in alto.

Per esprimere *ventimila* sovrapponi la medesima mano ampiamente distesa attraverso il petto.

Per esprimere *trentamila* colloca la mano sinistra adagiata sul mezzo del petto, in maniera che le dita sieno rivolte al suolo.

Per esprimere *quarantamila* colloca la mano medesima sopra l'ombelico con le dita rivolte in alto.

Per esprimere *cinquantamila,* colloca attraverso l'ombelico la medesima mano ampiamente distesa.

Per esprimere *sessantamila* colloca la mano medesima sull'ombelico, con le dita rivolte al suolo.

Per esprimere *settantamila* sovrapponi la mano sinistra alla coscia sinistra con le dita rivolte in alto.

Per esprimere *ottantamila* sovrapponi la medesima mano ampiamente distesa attraverso la coscia sinistra.

Per esprimere *novantamila* colloca sopra la coscia sinistra la medesima mano, con le dita rivolte al suolo.

Per esprimere poi i numeri *centomila, duecentomila, trecentomila,* ecc. fino al *novecentomila,* bisogna fare col medesimo ordine nella parte destra del corpo tutto quello che è stato fatto precedentemente nella parte sinistra.

Per esprimere i numeri *dieci volte centomila, venti volte centomila*, ecc., bisogna adoperare tutte e due le mani contemporaneamente con le dita variamente ripiegate *(ambas tibi manus insertis invicem digitis implebis)* (1).

---

(1) A pag. 309 del tom. I (op. cit. del Principe Baldassare Boncompagni) è riportato tradotto ed illustrato dal prof. *Aristide Marre* un poemetto arabo (Kassidek) di CHEMS-EDDIN EL-MOSSOULI. Il *Marre* trasse questa inedita composizione in versi da un manoscritto, posseduto dalla Biblioteca nazionale di Parigi, il quale comprende opere diverse (che nella maggior parte trattano di scienze matematiche) ed ha per titolo: *La guida del Kiateb*, parola questa che significa *scrivano* e talvolta *segretario, intendente*, ed in Egitto un *funzionario del Governo* destinato alla ripartizione e riscossione delle imposte. In questo poemetto, preceduti e seguiti dalle solite mistiche invocazioni orientali a Dio e al suo Profeta, stanno ordinatamente esposti i precetti per esprimere i numeri con la varia contrazione (flessione) delle dita delle mani, ossia piegando e levando le dita delle mani.

Ma nel secolo XV, prima e dopo del nostro A. Giovanni Noviomago, che, come egli dichiara, trascrisse queste norme dal Beda, altri scrittori ricordarono questa speciale maniera di rappresentare i numeri con la varia piegatura delle dita:

LUCA PACCIOLI, nella sua importante opera *Summa de Arithmetica* etc. precedentemente citata (che fu stampata a Venezia da Paganino de Paganini l'anno 1494 e ristampata dallo stesso a Toscolano sulla riva del Benaco l'anno 1523), nel *verso* della carta 36, riporta una grande tavola, nella quale si trovano 36 figure rappresentanti 36 diverse disposizioni delle dita della mano destra e sinistra destinate a significare numeri diversi. Pietro Cossali, nell'estratto pregevole che ci ha lasciato di questa opera, afferma che il Paccioli non ne spiega l'uso, ma ciò, a mio avviso, non è completamente esatto, perchè questa

Osservazione. — Confrontando il testo del Noviomago, (il quale nello esporre questa speciale rappresentazione dei numeri trascrisse letteralmente i precetti del Venerabile Beda (1), con quello degli

---

tavola è illustrata dalla seguente descrizione sommaria contenuta nelle ultime linee del *recto* della carta 36: *E pongotele per figurate che sonno 18 sinistre. E altre tante destre che in tutto fra ambedoi formano 36 acti per ognuna 18 e in la sinistra si compone fin cento unità e fornito el centinaro se loca in la man dextra e così li migliara: poichè si fa in quella per centinara e migliara come in la sinistra si fa per numeri e dicine. Per numeri inteso quelli menore de 10, come altra volta hai inteso.*

Giovanni Bolzani di Belluno, conosciuto sotto il nome di *Pierio Valeriano*, tratta del modo di esprimere i numeri con la inflessione delle dita delle mani nel 37° libro della sua opera intitolata *Hieroglyphica* etc. Stampata in Basilea nell'anno 1556.

Don Juan Perez de Moya tratta di questa particolare maniera di significare i numeri al Cap. IX del suo *Trattato de mathematicas*, ecc. stampato in Alcala de Henarez, l'anno 1573.

(1) Ho verificato l'identità, di cui si tratta, esaminando una pregevole edizione delle opere del Beda posseduta dalla R. Biblioteca Universitaria di Pavia, la quale porta per titolo: *Venerabilis Bedae Presbyteri Anglo-Saxonis, viri sua aetate doctissimi, opera quotque reperiri potuerunt omnia* (Coloniae Agrippinae — Sumptis I. W. Friessem — MLCCCXXXVIII, 8 vol. in fol.). Ogni pagina comprende due colonne ciascuna delle quali è numerata. In testa alla colonna del tomo I, segnata col numero 127, sta scritto: *Liber de loquela per gestum digitorum et temporum ratione;* i corrispondenti precetti sono esposti ordinatamente nelle successive colonne 132, 133, 134, perchè le precedenti sono occupate da una lettera illustrativa scritta intorno al medesimo argomento da un dotto non nominato e da una pre-

altri autori ricordati nella nota precedente (pag. 58) che scrissero dello stesso argomento ed intorno alla medesima epoca, vi ho potuto riscontrare varie ragguardevoli differenze, che giova sottoporre all'attenzione del lettore:

E prima di tutto mentre il Noviomago afferma che il *cento*, il *duecento*, il *trecento*, ecc. si esprimono con la mano destra, come si esprimevano rispettivamente con la sinistra il *dieci*, il *venti*, il *trenta*, ecc., il Marre, nella sua precitata traduzione dall'Arabo, il Paccioli con la sua tavola ricordata precedentemente, ed il Perez de Moya, nel suo *Tratado de Mathematicas*, ecc. insegnano che il *cento* il *duecento*, il *trecento*, *ecc.* si esprimono con la mano destra, come si esprimevano rispettivamente con la sinistra l'*uno*, il *due*, il *tre*, ecc., adoperando nella mano destra le particolari disposizioni delle dita, che nella sinistra significavano *dieci*, *venti*, *trenta*, ecc. per rappresentare il *mille*, *due mila*, *tre mila*, ecc. (1). È una differenza essenziale, perchè,

---

fazione che comprende osservazioni ed aggiunte di Giovanni Noviomago e di Briedfert, matematico Anglo-Sassone, dell' ordine di S. Benedetto, il quale visse nella seconda metà del secolo X.

(1) Il *Marre* traduce a questo riguardo: « Tu désires maintenant indiquer les centaines, eh bien! pour cela tu figures « avec ta main droite les unités que ta gauche a fait connaître; « garde — le dans ta mémoire; de même le dixaines de ta gauche « exprimées avec ta droite seront les unités de mille ».

E *Perez de Moya* scrive: « De aqui passan a la mano de-

mentre con questo procedimento si possono esprimere, con la mano destra ordinatamente ascendendo, le centinaia fino al novecento e le migliaia fino al nove mila, col procedimento trascritto dal Noviomago, dopo avere espresso con la mano destra le centinaia come si esprimevano con la sinistra le decine, per esprimere le migliaia (da *una* a *nove*), bisogna, direi quasi, ritornare sopra i proprî passi e disporre la mano sinistra come si disponeva la destra per rappresentare le successive unità semplici da *una* a *nove*. — Ecco la ragione per cui il pollice della mano destra piegato come la lettera greca *Γ*, secondo il Noviomago, significa 500, mentre secondo gli altri scrittori citati significherebbe 5000 (nella mano sinistra significa sempre 50).

Le altre differenze sono meno importanti. Così, ad esempio, non è detto nel Noviomago come si rappresenti il XL M, ma il Beda però lo insegna; si tratta adunque di una semplice dimenticanza. Altre significazioni numerali per mezzo delle dita sono descritte in maniera poco chiara, per la qual cosa ho creduto opportuno completare la lamentata lacuna e rettificare qualche passo oscuro secondo i criteri del buon senso e dell'euritmia, traendo conforto dall'esame degli altri scrittori.

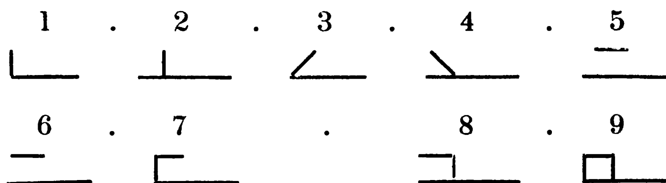
« recha, y donde en la yzquierda era uno, en la derecha, es « ciento, y donde en la yzquierda son dos, en la derecha do- « cientos, etc... ; y donde eran 10, en la derecha seran 1000, « y donde 20, en la derecha 2000, ecc.

Cap. XV.

Alcuni simboli dei numeri tratti dall'Astrologia Caldaica (1).

L' A. in questo capitolo avverte che vi sono anche certi altri simboli coi quali i Caldei e gli Astrologhi rappresentano, con arguto artificio, un numero qualsivoglia, simboli che gli furono significati da Rodolfo Paludano di Nimega. « *Eas notas propter* « *miram atque ingeniosam significationem nolui* « *praeterire* » scrive l'A.

I numeri si descrivono con un tratto rettilineo di questa forma ———, insieme con un altro tratto uguale approssimativamente alla quarta parte del primo ed applicato prima di tutto al termine del primo dalla parte sinistra in nove maniere diverse per significare i numeri dall'uno al nove. Esempio:



Se si applica il tratto minore dall' altra parte (cioè sotto) del tratto rettilineo più lungo, il simbolo risultante significa *decine;* se nella parte destra ma

(1) *De quibusdam Astrologicis sive Chaldaicis numerorum notis.*

superiormente, significa *centinaia;* se inferiormente significa *migliaia,* fino al nove mila, come sarà facile riconoscere dalle sottoposte figure:

=	10 .	=	20 .	=	30
=	40 .	=	50 .	=	60
=	70 .	=	80 .	=	90
=	100 .	=	200 .	=	300
=	400 .	...ecc....		=	1000
=	2000 .	...ecc....		=	9000.

L' A. termina il capitolo con questa importantissima osservazione: « *Ex harum (notarum) com-* « *mixtione quilibet alij fiunt compositi numeri,* « *usque ad DCCCC, unico tantum charactere,* « *porro mille milia geminata nota, veluti est vi-* « *dere in his quae descripsimus.* » (Con la combinazione di questi simboli si possono rappresentare tutti quanti i possibili numeri fino al *novecento* (1) e con una sola figura; le migliaia di migliaia poi con simbolo ripetuto, come si può riconoscere nei numeri sotto descritti):

---

(1) L'A. commette evidentemente un errore; invece di *novecento* doveva dire *novemila novecento novantanove;* nel testo alla scritturazione *DCCCC* doveva essere sostituita l'altra *IXM.* DCCCC. XCIX, che sarebbe rappresentato dalla figura: .

Anno ab orbe facto = (anno dalla creazione del mondo) = 6738.

Ab Urbe vero condita = (dalla fondazione di Roma). = 2293.

A Christo servatore nato = (dalla nascita di Cristo salvatore) = 1539 (1).

Mille migliaia poi si esprimerebbero in questa maniera: = 1000000.

Cap. XVI.

Segni dei numeri ordinariamente chiamati: cifre.

L' A. incomincia questo capitolo con la seguente osservazione: « *Siphras vocant notas has numero* « *decem 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 0, quarum* « *prima est unitatis, secunda binaris, 9 nove-*

(1) Questo esempio è quello che mi ha confermato nell'opinione che l'esemplare del Noviomago, che io ho tra le mani, appartenga all'edizione del 1539 e non a quella del 1544, cosa del resto già ricordata nella prefazione di questo mio lavoro.

« *narij, 0 vero circularis nota, quam ex his so-*
« *lam alij vocant Sipheram, Georgius Valla Zi-*
« *phram, per se quidem nihil significat, sed*
« *limitis tantum aut regionis in qua nullum nu-*
« *merum collocare volumus, locum occupat.* »
(Chiamano *cifre* le seguenti dieci figure 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 0, delle quali la prima esprime l'*uno*, la seconda il *due*, ecc. e la nona il *nove*, mentre la figura circolare 0 per se stessa significa *niente*, ma viene soltanto adoperata per occupare il posto di quell'ordine nel quale non intendiamo collocare alcun numero) (1).

---

(1) Intorno all' origine della parola italiana *zero (circularis nota)* abbiamo già parlato incidentalmente nella nota (2) del precedente Cap. VI, discutendo intorno all' origine ed al significato della parola *cifra* = *figura*. Qui possiamo prima di ogni altra cosa osservare che non é punto esatto che Giorgio Valla abbia chiamato *ziphram* lo zero, perchè Giorgio Valla lo chiama invece *tziphram*, come si puó riconoscere leggendo il Cap. I del libro III della sua grande opera enciclopedica intitolata « *De expetendis et de fugiendis rebus* ». — Gioverà anche ricordare che, secondo il Prof. *A. Vincent.* (Journal des Mathématiques pures et appliquées — Paris, 1839), la parola *zero* deriva dalla voce ebraica *zer* (che significa circolo, aureola, corona) con terminazione italiana o spagnuola; ed invece secondo il *Dr. Nesselmann* (Die Algebra der Griechen, ecc. Berlin, 1842) la voce *zero* deriva dalle parole arabe *sarhd sifr*, che significano *campo vuoto*, oppure *posto vuoto*. Il Nesselmann afferma poi che la parola *zero* trovavasi già nell' infima latinità (« *im spateren latinismus* »).

Nel *Bollettino di Bibliografia e storia delle scienze Mate-*

Successivamente l'A, ricordati i rari pregi del nostro sistema di numerazione, discute sui probabili inventori di queste speciali figure, avverte che Valla nel libro terzo della sua Aritmetica, al cap. I°, ne attribuisce la scoperta agli Indi, popoli dell'oriente (1), e finalmente afferma che questi segni particolari

---

matiche, ecc., pubblicato dal Principe B. Boncompagni, nel primo articolo del tomo XVI (Roma, 1883) a pag. 673 e seg., sono riportati alcuni brani di tre trattati scritti rispettivamente nel 1307, nel 1346 e nel 1370, nei quali si trova adoperata la parola *zero*, per concludere che nel secolo XIV la lingua italiana aveva già la parola *zero;* la medesima voce poi si trova ancora più frequentemente usata in molti altri scritti composti nella nostra lingua nel secolo XV (V. le note a pag. 9 e 10 del mio *Trattato di Aritmetica*, op. citata e *Le Regoluzze*, ecc. op. cit. del Prof. G. Frizzo, a pag. 41 e 42). Notizie sommarie intorno allo *zero* furono recentemente pubblicate dal Prof. A. Chiari a pag. 145, 146 dell'ottimo *Bollettino di Matematiche e di Scienze naturali* diretto dal dott. Alberto Conti (Bologna, Aprile 1901). A mio avviso, il lavoro più completo intorno allo *zero* si ha nella nota pubblicata nel « *Giornale degli eruditi e curiosi* » (Anno I, Vol. II, Maggio-Ottobre, 1883 Padova) e riprodotta appunto, con aggiunte e correzioni, nel precitato tomo XVI del *Bollettino*, ecc. (Principe B. Boncompagni).

(1) Riporto il corrispondente brano del Noviomago integralmente trascritto: *Valla libro tertio Aritmetices capite primo: Indis orientalibus gentibus inventionem tribuit, argumento descriptionis, quae a dextris partibus in sinistras (contrario modo atque nos scribimus) eat, quod Chaldeis, Syriis, Aegyptiis et toti denique orienti est commune.*

I particolari caratteri simbolici, coi quali noi volgarmente rappresentiamo i nove primi numeri e la figura che esprime lo

erano ignoti affatto ai Greci ed ai Romani, perchè non furono mai riscontrati nelle più antiche iscrizioni greche e latine.

---

zero, secondo alcuni ci derivano dagli Arabi e per questo le nostre cifre si chiamano *arabiche*, in opposizione alle *romane* adoperate nel medio evo, secondo altri dagli Indiani presso i quali gli Arabi avrebbero trovata questa invenzione, donde poi fu trasportata in Europa. — I Matematici discussero lungamente intorno all' origine delle nostre cifre e con copia di studi e di argomenti variamente efficaci. Questa ricerca è una di quelle eleganti questioni che, con un fascino speciale, appassionano vivamente i cultori della storia della Matematica. — Seguendo l' opinione del mio illustre concittadino Pietro Cossali, (come il Noviomago seguendo il Valla), io credo che le nostre cifre sieno a noi pervenute dagli Indiani, e sieno state trasportate in Europa dagli Arabi; per questo io le chiamo *indo-arabiche*. — Intorno all' importantissimo argomento si può consultare:

G. Libri — *Histoire des sciences mathématiques en Italie, ecc.* (Paris, Renouard, 1838-41).

M. Chasles — *Historie de l'Aritmétique* (Comptes rendus de l'Accadémie des sciences, 1843).

Arneth — *Geschichte der reinen Mathematik* (Stuttgard, 1852 e Revue des deux Mondes 1874).

Pietro Cossali — *Sull' origine dell' odierna Aritmetica ed Algebra, ecc.* (scritti inediti, Roma 1867, pag. 359 e seg).

F. Woepke — *Sur l'introduction de l'Arithmétique indienne en Occident. ecc.* (Roma 1859).

M. Cantor — *Mathematische Beïtrage zum Culturleben der Völker.* (Halle 1863).

Th. H. Martin — *Les signes numéraux et l'Arithmétique, chez les peuples, de l' antiquité et du moyen âge.* (Roma, 1864, pag. 11).

L. Am. Sedillot. — *Sur l'origine de nos chiffres.* — Lettre

Tutto ciò premesso, l'A. espone il nostro sistema di numerazione nella maniera seguente:

Si principia dalla destra, dove la figura che si scrive nel primo luogo significa tante unità quante

---

a M, le Prince Balthassar Boncompagni (Extrait des Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei, Anno 1865).

H. Sutter — *Geschichte der mathematischen Wissenschaften* (Zürich, 1873, pag. 10 e seg).

F. Hoeffer — *Histoire des Mathématiques* (Paris, 1874, p. 50 e seg., e pag, 303 e seg).

Ricorderò solamente intorno all'importante questione che all'epoca di Gerberto, il quale fu poi Papa Silvsetro II, (Secolo XI e XII) la parola *Abbaco*, di cui abbiamo parlato nella nota (1) al cap. VII, significava una tavola che conteneva una serie più o meno grande di colonne segnate rispettivamente coi simboli I, X, C, M, ecc. Queste colonne corrispondevano da destra a sinistra agli ordini decimali ascendenti e rappresentavano un numero qualsivoglia per mezzo di segni particolari (apici) esprimenti i numeri dall'1 al 9, *senza però adoperare lo zero*, segni che, sotto forme successivamente diverse, si trovano già nei manoscritti dell'XI e XII secolo e che, trasformandosi continuamente nella loro particolare figura fino ai secoli XIV, XV, XVI, devono necessariamente essere considerati come i naturali progenitori delle nostre cifre indo-arabiche (v. *Hankel* — op. cit , pag. 325). — D'altra parte lo Chasles, traendo dall'oblio, nel quale precedentemente giaceva, un ragguardevole passo di Severino Boezio, in cui è descritta una specie di abbaco adoperato per il calcolo dai Neo-Pitagorici, ascrive a Boezio la invenzione o per lo meno la cognizione del nostro sistema di numerazione. — Il Libri combatte valorosamente e, a mio avviso, vittoriosamente questa strana idea dello Chasles. — Il Cantor poi, insieme con alcuni altri matematici, discutendo intorno al passo di Boezio precedentemente ricor-

ne esprimerebbe se fosse sola. — Questo luogo si chiama il limite, ossia l'ordine, *monadico,* cioè l'ordine *singolare* o delle *unità* (semplici).

Nel secondo luogo (procedendo da destra a sinistra) le figure esprimono tante decine quante sono le unità (semplici) che esprimerebbero per sè sole,

---

dato, giunge persino a suppòrre che Pitagora abbia già usato una tavola cosparsa di polvere per disegnarvi sopra con un' asticella non solo delle figure geometriche *(mensa geometricalis)*, ma anche un particolare sistema di colonne per il calcolo, virtualmente informato, riguardo al fondamentale principio che ne rappresenta la base, al nostro sistema di numerazione. E sotto questo speciale riguardo il Cantor ritiene che la parola *Ἄβαξ* derivi appunto dalla voce *abak* = polvere. Ad ogni modo i Greci ed i Romani non conoscevano lo *zero* nè per la forma, nè per l'ufficio. Nell'Abbaco la colonna priva di quel determinato ordine di unità sarebbe rimasta vuota. — Il primo che ebbe l'idea semplice e luminosa ad un tempo di concedere ai simboli numerici un valore di figura (assoluto) ed un valore di posizione (relativo) ed adoperò in casi determinati a questo scopo lo zero, molto probabilmente, fu Mohamed-ben Mousa, soprannominato Al-Kharizmi (o Alkharismi), il quale intorno al 900 significava col nome di *differenza* ciò che noi oggi chiamiamo *ordine decimale* e che dal nostro A. talvolta è chiamato *ordo*, tale altra *limes*. — Insieme con Pietro Cossali e col Principe B. Boncompagni, io credo che Leonardo Pisano (figlio di Bonacci e per questo chiamato anche *Fibonacci)* sia stato il primo a pubblicare e a diffondere in Europa il sistema indiano, già adottato dagli Arabi. — Il *Marie*, a pagina 137 del tomo II dell'op. cit., parlando dei primi 14 capitoli dell' *Abacus* di Leonardo da Pisa, scrive: « *Ils contiennent la première exposition qui ait été pubbliée en Occident de système de numération des Hindous adopté par les Arabes* ».

così la figura 3, se si scrive sola, significa *tre*, se si scrive al secondo luogo, come nel numero 39, significa *trenta*.

Nel terzo luogo ciascuna figura esprime centinaia, cioè in questo posto ogni figura significa *cento*, mentre collocata al secondo posto significherebbe soltanto *dieci* volte quello che invece esprimerebbe scritta al primo posto.

Nel quarto luogo ciascuna figura significa *mille;* nel quinto *diecimila ;* nel sesto *centomila;* nel settimo *dieci volte cento mila*, ossia *mille volte mille;* nell' ottavo *cento volte cento mila*, ossia *diecimila volte mille ;* e così di seguito procedendo nel medesimo modo per decupli all' infinito.

L'A. termina il capitolo esponendo qualche norma per poter rilevare agevolmente, per mezzo di apici opportunamente sovrapposti, i numeri scritti con molte figure e conseguentemente poterli con esattezza esprimere a parole.

Cap. XVII.

Dell' addizione.

In questo capitolo l' A., dopo aver dato la definizione dell' addizione (seconda parte della numerazione, ossia del calcolo, che alcuni chiamano anche

composizione), espone, dopo opportune premesse, la regola generale per fare l'addizione di numeri composti di quante si vogliano figure, i quali per conseguenza possono essere rispettivamente maggiori di *dieci*.

Riguardo alla definizione, l'A. dichiara che « l'addi-« zione non è altro che il raccoglimento di più numeri « dati in una sola somma ». — *Ea est plurimum numerorum in unam summam comprehensio.* — Ciò premesso, avverte tosto che se i numeri proposti sono rispettivamente minori del *dieci*, la loro addizione non si effettua con una regola determinata, ma mentalmente (per giudizio di natura). — Egli scrive: « *Si (numeri) intra denarium sunt non arte, sed naturae judicio colliguntur.* » Così ad esempio: 2, 3, 7, 9 formano 21. (1).

L' A. successivamente espone per mezzo di opportuni esempî in qual maniera si debba procedere per fare l' addizione di numeri, che comprendono ciascuno ordini diversi, come 321, 124, 130, oppure 2354, 620, 76.

Egli ricorda che i termini dell'addizione devono

---

(1) È il caso fondamentale dell' addizione che si risolve col *numerare in avanti*, contando cioè in seguito al primo numero ad una ad una tutte le unità contenute nel secondo ed in seguito al risultato ottenuto ad una ad una tutte le unità del terzo numero e così di seguito successivamente, fino all'ultimo numero proposto.

essere sottoposti l' uno all' altro in maniera che le figure del primo ordine in alto ed in basso si corrispondano perpendicolarmente, ed analogamente per le figure degli altri ordini successivi. *(ut primi limitis notae ex perpendiculo sursum et deorsum sibi respondeant, simili modo et aliorum limitum notae)*. Gioverà adunque scrivere: 321
124
530,

e non in questa maniera: 321
124
530.

Sarebbe certo una disposizione poco opportuna per ottenere agevolmente la somma dei numeri proposti, la quale è rappresentata dal numero 975.

L' A. poi, nell' effettuare la seconda addizione proposta, insegna in qual modo si deve procedere quando qualche somma parziale supera il numero *dieci* e scrive:

$$\begin{array}{r} 2354 \\ 620 \\ 76 \\ \hline 3050 \end{array}$$

Il Capitolo termina con la seguente osservazione: « *Commoditatis est in hac parte numerationis, majorem numerum superiore loco scribere, minores inferiore, in alijs etiam necessitatis* ».

In una parola il nostro A., dopo aver detto che i termini dell'addizione devono essere collocati gli uni sotto gli altri in maniera che le unità del medesimo ordine si trovino nella medesima colonna, afferma che nell' addizione giova scrivere i numeri maggiori ordinatamente sopra i minori, mentre nelle altre operazioni questa particolare avvertenza non è soltanto vantaggiosa, ma necessaria. — Ora noi sappiamo invece che queste speciali disposizioni dei numeri, se possono giovare nella materiale esecuzione delle operazioni, non sono affatto necessarie (1).

Cap. XVIII.

Della Sottrazione.

In questo capitolo l'A., dopo avere data la definizione della sottrazione, insegna per mezzo di opportuni esempî la regola per sottrarre un numero

---

(1) È da notarsi che l'A. non accenna punto ad alcuna specie di *prova* dell'addizione. Le Aritmetiche pubblicate anche prima del secolo XVI (come quelle, ad esempio, di Leonardo Pisano e di Luca Paccioli) riportano a questo proposito varie specie di prove: 1°: procedere nelle singole addizioni parziali in senso inverso a quello seguito prima; 2°: adoperare la sottrazione; 3°: eseguire la prova per 9 o per 7, *che meglio del 9 mostra gli errori e falli*, scrive il Paccioli, il quale, alla carta 20 dell'op. cit., avverte successivamente che si può fare la prova anche per

da un altro, qualunque sia il numero delle loro figure.

Riguardo alla definizione, l'A. dichiara che « la « sottrazione è quell' operazione per la quale, dati « due numeri l'uno maggiore e l'altro minore, si « trova un terzo numero, del quale il maggiore supera « il minore ». Egli scrive: « *Subtractio est, duobus numeris propositis majore et minore, tertij inventio quo maior minorem excedit* ».

Successivamente vengono considerati tre esempi diversi: nel primo ciascuna cifra del diminuendo supera la corrispondente cifra del medesimo ordine del diminutore; nel secondo esempio qualche cifra del diminuendo è minore della corrispondente cifra del medesimo ordine del diminutore; nel terzo esempio, procedendo da destra a sinistra, vi sono successivamente due o più zeri (*notae circulares*) e la prima cifra significativa del diminuendo appare solamente al terzo od anche al quarto ordine.

Esempio I:	8652
	7430
Il residuo è	1222

---

qualunque altro numero diverso dal 9 e dal 7, come, ad esempio, per 5 e presenta una così detta *dimostrazione geometrica della prova per 9*, giustificata dalla penultima *conceptione* del VII libro di Euclide: *Si numerus partem quamlibet habet, numerus a parte denominatus eum metitur.*

Esempio II: 3054
2045

Il residuo è 1009

L'A. in questo caso immagina aumentata di 10 la prima cifra a destra 4 del diminuendo, che per conseguenza diventa 14, a condizione però che sia aumentata di 1 la successiva cifra 4 a sinistra del diminutore.

Esempio III: 7000
2436

Il residuo è 4564

In questo caso, insegna l'A., bisogna considerare come 10 l'estremo zero a destra del diminuendo e gli altri successivi come 9, avvertendo di aggiungere 1 per compensazione alla cifra del diminutore sottoposta alla prima cifra significativa del diminuendo — *inferiori autem adde unitatem super quem nota numeri ponitur* (1).

---

(1) Fra i due metodi adoperati per superare quella difficoltà, che nella sottrazione si presenta quando qualche cifra del diminutore supera la corrispondente cifra del diminuendo, metodi che nella mia Aritmetica (*Drucker e Tedeschi* — Verona, 1888 — 6ª ediz.) ho chiamato: metodo del *prestito* e metodo dell'*aumento arbitrario*, l'A. preferisce, e con ragione, il metodo dell'aumento arbitrario.

A proposito della Sottrazione, relativamente alla *prova*, si possono ripetere le osservazioni fatte precedentemente in nota

CAP. XIX.

DELLA MOLTIPLICAZIONE.

In questo capitolo l'A., dopo avere data la definizione di moltiplicazione, per mezzo di opportuni esempî, insegna la regola di moltiplicazione, considerando successivamente casi meno semplici.

Riguardo alla definizione egli scrive: « *multiplicatio est per quam numerus in se aut alium productus maior redditur* ». Ciò premesso, avverte che altri dànno della moltiplicazione una definizione diversa e precisamente: « La moltiplica-
« zione è quell' operazione, per la quale, proposti
« due numeri, se ne trova un terzo, nel quale il
« numero moltiplicato (moltiplicando) è contenuto
« tante volte quante volte il moltiplicante (moltipli-
« catore) contiene l' unità » (*Est propositis duobus numeris tertij inventio, in quo multiplicatum toties continetur quoties multiplicans unitatem comprehendit*) (1).

---

all' Addizione. In aritmetiche anteriori per l' epoca alla pubblicazione dell'opera del nostro A. si insegna che la sottrazione (chiamata, anche, con frase scultoria: *abbattimento di un numero da un altro)* si può provare coll'addizione, e anche per 9 e per 7.

(1) Essenzialmente questa definizione concorda con quella che della moltiplicazione, nel suo significato generale, ha poi

Successivamente l' A. considera quattro esempi, cioè la moltiplicazione di 8 per 7, la moltiplicazione di 220 per 3, nella quale ciascun prodotto parziale non supera il 10, la moltiplicazione di 563 per 3, nella quale alcuni prodotti parziali superano il 10 e finalmente la moltiplicazione di 2036 per 23, la quale rappresenta il caso generale.

I procedimenti esposti dall'A., per la soluzione dei vari casi, sono perfettamente uguali a quelli che si adoperano anche presentemente, fatta però eccezione per il primo caso, vale a dire per la moltiplicazione di 8 per 7, che rappresenta appunto il caso fondamentale della moltiplicazione ed oggigiorno si risolve d'un tratto, dopo avere mandato a memoria i risultati contenuti nella tavola pitagorica.

L'A. infatti scrive: « *Numeri simplices multiplicantur ad hunc modum: Descriptis altero superius altero inferius, quantum quisque a denario differt e regione destrorsum scribitur* ». Questa è, direi quasi, una specie di operazione preparatoria, la quale conduce al seguente prospetto:

8	2
7	3

---

dato il Gauss: *Quell'operazione aritmetica per mezzo della quale, dati due numeri* (moltiplicando e moltiplicatore), *se ne determina un terzo* (prodotto) *formato col moltiplicando, come il moltiplicatore è formato coll' unità.*

Ora bisogna moltiplicare fra loro le due differenze, avremo 6 che rappresenta l' estrema cifra a destra del prodotto; per avere la cifra a sinistra basta dal numero 8 levare la seconda differenza 3, oppure dal numero 7 la prima differenza 2; tanto nell' uno quanto nell'altro caso avremo 5 e per conseguenza il prodotto richiesto sarà 56.

NB. — Il procedimento, esposto dall'A. per risolvere il caso fondamentale della moltiplicazione, è perfettamente esatto; riuscirebbe facilissimo il dimostrarlo (1), ma schiettamente io non so in qual maniera giustificarlo, tanto più che anche questo procedimento domanda essenzialmente la cognizione della tavola pitagorica.

Un certo vantaggio si ha solamente quando tutti e due i numeri proposti sieno rispettivamente maggiori di 5, perchè allora i loro complementi rispetto al 10 sono minori di 5 ed in questo caso la moltiplicazione mentale riesce più facile; basterebbe insomma una mezza tavola pitagorica.

Il capitolo termina con una importante osservazione, nella quale è detto che la moltiplicazione è

---

(1) Rappresentando con d il *denarius* (il numero 10) si avrà: $(d - 2) \times (d - 3) = dd - 2\,d - 3\,d + 6 = d\,(d - 2 - 3) + 6$.
Le unità del prodotto sono 6 e le decine sono $d - 2 - 3$, cioè tanto $(d - 2) - 3$ quanto $(d - 3) - 2$. *Quod erat demonstrandum.*

un' operazione usata molto frequentemente e con grande vantaggio, specialmente per determinare il numero delle parti che sono contenute negli interi, oppure per risolvere eleganti questioni numeriche, delle quali altrimenti sarebbe molto difficile la soluzione. *(Dissolvuntur hoc artificio saepe jucundae quaestiones numerorum, quas alioqui difficile esset invenire)* — A riprova di questa duplice affermazione l' A. propone e risolve per mezzo della moltiplicazione i due seguenti problemi:

A) Quanti sono i piedi quadrati contenuti in un campo lungo 240 piedi e largo 120?... Soluzione: 28800 piedi quadrati.

B) Quanti versi contiene l' Iliade d' Omero scritta in 312 pagine, ognuna delle quali comprende 50 versi?... Soluzione: 15600 versi (1).

---

(1) Sarà bene che il lettore raffronti con la regola di moltiplicazione esposta dal Noviomago le otto maniere diverse di moltiplicazione: per *scacchieri;* per *castelluccio;* per *colonne;* per *crocetta;* per *quadrilatero;* per *gelosia;* per *ripiego,* ed a *scapezzo,* esposte ordinatamente da L. Paccioli nella distinzione seconda della sua *Summa de Arithmetica,* ecc. (op. cit. cart. 26 e seg.).

Il medesimo autore espone la prova della moltiplicazione per 9 e per 7: *si moltiplicano fra loro le prove dei producenti* (fattori) *ed il risultato deve essere uguale alla prova del prodotto.* La ragione si ha nella prima proposizione del II libro di Euclide e per questo alla dimostrazione viene ascritto un carattere geometrico.

Cap. XX.

Della Divisione.

L' A., in questo capitolo, dopo aver dato le due più importanti definizioni della divisione, prima quella che deriva dal concetto di ripartizione e poi quella che deriva dal concetto di continenza, passa ad esporre la regola di divisione considerando successivamente degli esempi sempre meno agevoli e precisamente i seguenti: 748 diviso per 4; 260 diviso per 5 ; 264 diviso per 12 ; 9084 diviso per 3 ; 8238 per 27.

Riportiamo qualcuno dei casi svolti dall' A. per ben comprendere il procedimento seguito e la particolare disposizione data a questa importantissima operazione:

Per dividere 748 per 4, si scrive il divisore 4 sotto il 7 del dividendo. Il 4 in 7 sta 1 volta e per conseguenza si scrive 1 alla destra del dividendo dopo una semiparentesi, rappresentata da una linea curva. Resta 3 che scrivo sopra il 7, dopo avere condotto prima in pratica attraverso questo 7 una lineetta, per ricordare che ormai lo si deve considerare come zero *(prius tamen septenarij figura transversa transpuncta, quo memoria sit nunc eam pro nihilo haberi).* — Ciò fatto, si trasporta il divisore 4 di un posto verso destra sotto

3 2
7 4 8 (187
4 , 4 , 4

il 4 del dividendo il quale ultimo insieme col 3 (centinaia) segnato precedentemente sopra il 7 forma il numero 34 (decine); ora il 4 in 34 sta 8 volte ed avanzano 2; scrivo otto alla destra di 1 dopo la semiparentesi e scrivo il residuo 2 sopra il 4 del dividendo; dopo avere condotto un segno trasversale sopra il dividendo parziale 34, perchè ormai conta come zero, si trasporta il divisore 4 di un altro posto verso destra e precisamente sotto l' 8 del dividendo. Ora, riferendo il residuo 2 alla successiva figura a destra del dividendo, diremo: il 4 in 28 sta 7 volte esattamente, che si scrive alla destra di 8 dopo la linea arcuata, formando così il numero 187 che rappresenta il risultato della divisione (quoto o quoziente) e che dal nostro A. latinamente è chiamato *productus*.

Consideriamo ora il caso nel quale è proposta la divisione del numero 8238 per il numero 27. — Si colloca il 27 ordinatamente sotto 82 e si opera nella seguente maniera: il 2 in 8 sta 4 volte, ma il 7 in in 2 non istà 4 volte, per conseguenza bisogna discendere al 3 (volte) dicendo: il 2 in 8 sta 3 volte con resto uguale a 2 che si scrive sopra la figura 8 del dividendo; il 7 in 22 sta pure 3 volte con resto uguale ad 1 che si scrive sopra il 2 del dividendo; alla destra del dividendo dopo la linea arcuata scrivo al posto del risultato il 3. Fatto ciò, si trasporta il divisore verso destra non di un posto

solamente ma di due posti, perchè nel sovrapposto dividendo non è rimasto tanto da contenere il divisore almeno *una* volta, infatti il 13 non contiene il 27; per questa trasposizione si avverta bene che bisogna segnare lo zero *(notam circularem)* alla destra del risultato. Ora il 2 in 13 sta 5 volte (si potrebbe dire anche 6 volte, ma non giova perchè altrettanto non sarebbe contenuto il 7 in 18) con resto uguale a 3 che si scrive sopra il 3 del dividendo, e il 7 in 38 sta pure 5 volte con resto uguale a 3 che si scrive sopra l'8 del dividendo, mentre si scrive 5 alla destra dello zero nel posto del risultato.

2 1 3 3

8 2 3 8 $(305\frac{3}{27}$

2 7,2 7

Il residuo finale 3 non può essere evidentemente diviso per 27. Si sottopone al 3 un tratto rettilineo e gli si scrive sotto il divisore, scrivendo alla destra del risultato la espressione $\frac{3}{27}$. — L'A. osserva: « *Quae descriptio quid velit et quomodo tractanda sit inferius dicemus* », (Diremo in appresso che cosa significhi questa particolare scritturazione e come deve essere interpretata).

L'A. termina il capitolo con questo avvertimento: In pratica, nella soluzione dei problemi, ordinariamente la divisione è quasi sempre adoperata insieme

con la moltiplicazione; questa operazione si usa sola soltanto quando si tratta di ripartire un numero in parti eguali. Esempio: Ripartire egualmente 2064225 monete fra 425 persone. — Si scrive il divisore sotto il dividendo in maniera che il 4 si trovi sotto lo zero, il 2 sotto il 6 ed il 5 sotto il 4. Si effettua la divisione seguendo la regola esposta precedentemente e si avrà per risultato 4857, per la qual cosa potremo concludere che a ciascuna persona spettano 4857 monete. A sinistra è trascritto il successivo svolgimento della corrispondente operazione.

```
    2
   2 4 1
   4 4 9
  3 6 8 2 3
  4 8 4 2 7
2 0 6 4 2 2 5 (4857
  4 2 5,4 2 5
   4 2 5
     4 2 5
```

Negli altri casi, vale a dire risolvendo altre specie di problemi, le operazioni dell' aritmetica si adoperano quasi sempre insieme combinate. Esempio: Un campo è lungo passi M e largo DCCC; quanti jugeri comprende la superficie di quel campo? — Si moltiplica 1000 per 800, si ottengono 800 000 passi; moltiplicando successivamente per 5, si hanno 4000000 piedi quadrati, cioè quaranta centinaia di migliaia di piedi quadrati *(quadragies centena milia pedum quadratorum)* o come si direbbe modernamente: 4 milioni di piedi quadrati; dividendo ora questo

numero per XXVIII.M.DCCC (28800), numero dei piedi quadrati contenuti in un jugero di terreno, si troveranno quanti sono i jugeri contenuti in quel campo.

```
  2
  3
  29
  555
 1182
22266
4000000 (138 25600/28800 (1)
28800
  28800
    28800
```

L'A., dopo avere a sinistra trascritto il prospetto che rappresenta il successivo svolgimento di questa punto agevole particolare divisione, che chiama *difficillimae divisionis exemplum*, conclude con la seguente osservazione: Negli esempi a numeri molto forti bisogna attentamente avvertire che, sottraendo da un dividendo parziale il prodotto ottenuto moltiplicando il divisore per il quoziente ultimamente trovato, non si ottenga un residuo, da cui il divisore possa ancora essere levato una o più volte. — Per questo l'esempio proposto richiede grande attenzione e non presenta piccola difficoltà – *In exemplis tam numerosis diligenter animus attendendus est,*

---

(1) Questa frazione semplificata equivale a $^8/_9$, per la qual cosa in quel campo saranno contenuti 138 jugeri e $^8/_9$ di jugero.

ne priore numero aliquoties ablato non tantum reliquatur, unde omnes toties auferri possint, quapropter exemplum quod superius posui diligentissimam requirit cogitationem, estque non parvae difficultatis (1).

---

(1) Osservando anche per la Divisione la *Summa de arithmetica* di L. Paccioli, tante volte citata, si trovano esposte quattro maniere diverse per eseguire la divisione, cioè: a *regolo;* a *ripiego;* a *danda;* a *galea.*

Il procedimento esposto dal nostro A. è quello chiamato a *galea* (galera) dalla figura, che va assumendo in alto e in basso il tipo delle operazioni. Per questa medesima ragione il Tartaglia la chiama: divisione a *battello.* Quando a questo metodo siasi, come suol dirsi, fatta la mano, esso riesce abbastanza agevole. — L' HANKEL, alla pag. 258 dell' op. citata, trattando della Storia della matematica presso gli Arabi, nel capitolo intitolato *Elementare Rechenkunst,* riporta un esempio di divisione eseguita con questo procedimento, e in una nota avverte che questo sistema, conosciuto sotto il nome: « *Dividiren über sich* », era molto diffuso in Germania fino al secolo XVIII. — I più vecchi maestri di calcolo nella parte occidentale della Germania, egli soggiunge, insegnano frequentemente anche adesso per la divisione questo metodo soltanto, lasciando da parte l'altro metodo moderno chiamato « *Dividiren unter sich* ».

A pag. 150 e 151 del tom. I del *Bollettino,* ecc., pubblicato dal Principe B. Boncompagni, G. A. VORSTERMAN, VAN OIJEN, nell' articolo intitolato *Notice sur Ludolphe Van Colen,* riporta la seguente divisione 4 490 798 098 per 5 639 eseguita col procedimento esposto dal Noviomago; il Vorsterman scrive: *Je rapporte ici en marge toute l' operation, qui plaît à la fois par son élégance et par sa facilité.*

Noto incidentalmente che Ludolphe Van Colen (n. 1539 — m. 1610) non adoperava ancora le parole *milioni, bilioni, ecc.*

Cap. XXI.

Della Progressione.

Questo capitolo può essere considerato quale l'esordio del successivo capitolo XXII. — L'A. incomincia col dire che alcuni alle parti della logistica aggiungono anche la *progressione*, un'operazione più sottile e leggiadra che necessaria *(magis subtilem et jucundam quam necessariam)*.

Dopo avere dichiarato che essa è quella operazione per mezzo della quale si compongono in una sola somma più numeri che dagli inferiori ai superiori ascendono con un certo ordine determinato, come 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8., avverte che si possono distinguere due specie di progressioni, la prima detta *aritmetica*, la seconda *geometrica ;* nell'*aritmetica* i numeri ascendono ai successivi superiori con uguale differenza *(aequali interstitio)*, come

---

sebbene molti altri scrittori Olandesi, sull' esempio dei geometri Francesi, le avessero già usate da molto tempo, per la qual cosa egli enunciava il dividendo della precedente divisione nella seguente maniera: *quattro mila volte mille migliaia, quattrocento novanta mille migliaia, settecentonovantotto mila, novantotto.*

Ricordo che il Paccioli espone anche per la divisione la prova del 9 e del 7 e dalla dimostrazione della prova del 9 riguardo alla moltiplicazione deriva la dimostrazione della prova stessa riguardo alla divisione.

ad esempio: 1. 2. 3. 4, oppure: 1. 3. 5. 7. 9; e di queste due, la prima è chiamata dall'A. *continua* e la seconda *discreta* (1); nella *geometrica* tutti i successivi numeri hanno fra loro costantemente la medesima ragione *(numeri omnes distant eodem genere proportionis)*, come: 1, 2, 4, 8, 16, ecc. oppure: 3, 9, 27, 81, ecc.; tra i numeri successivi della prima vi è costantemente ragione doppia; fra i numeri successivi della seconda vi è ragione tripla (2).

*
* *

Osservazione. — È facile accorgersi che le nozioni fondamentali esposte in questo capitolo intorno alle progressioni hanno forma particolare ed incompleta e che nella mente dell'A. vi è, direi quasi, identità fra il concetto di progressione ed il concetto di somma dei termini di una progressione. Infatti non è data la definizione speciale di *serie,* ma della somma dei termini di una *serie* speciale, molto probabilmente perchè la determinazione della somma dei termini di una *serie* è il problema che maggiormente interessa nella matematica.

---

(1) Alcuni la chiamavano *discontinua* o *intercisa.*

(2) Vedi il capitolo V del Libro II.

Cap. XXII.

Metodo per determinare la somma di numeri disposti in progressione (1).

L'A. distingue due casi: o la serie dei numeri proposti è pari o è dispari; nel primo caso si moltiplica la somma degli estremi per la metà del numero dei termini della serie, nel secondo caso si prende il numero medio e lo si moltiplica per il numero dei termini della serie. Se abbiamo scritto tutti i successivi numeri naturali dall'1 al 100, la somma degli estremi sarà 101, che, moltiplicata per la metà dei termini di tutta la serie, cioè per 50, dà 5050. Se si ha invece la serie: 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10, nella quale il numero dei termini è dispari (nove), si prende il termine medio 6, lo si moltiplica per 9 e si avrà 54 (2).

---

(1) *Ratio colligendi numeros in proportione arithmetica positos.* — La traduzione letterale sarebbe la seguente: *Metodo per determinare la somma di numeri disposti in proporzione aritmetica*, la quale poi non corrisponde affatto al contenuto del capitolo, che comprende la soluzione del problema proposto tanto per le progressioni aritmetiche, quanto per le geometriche.

(2) Si avverta come l'A. consideri successivamente casi particolari, senza ascendere al caso generale, nel quale la somma richiesta si otterrebbe moltiplicando la somma degli estremi per la metà del numero dei termini: $s = (a + u) \frac{n}{2}$.

L'A. passa successivamente a considerare la progressione geometrica, nella quale la somma si compone nella seguente maniera: Si moltiplica il massimo numero per quello che rappresenta la ragione della progressione, dal prodotto si leva il primo numero, cioè il minimo, e quello che rimane si divide per 2 se la ragione è tripla; per 3 se la ragione è quadrupla; per 4 se la ragione è quintupla, ecc.; se la ragione è doppia, il prodotto non si divide, perchè il divisore è sempre minore di 1 rispetto alla ragione (1).

A questo punto, l'A. ricorda che alcuni aggiungono alle parti già considerate della logistica anche la *estrazione di radice* (quadrata, biquadrata e cubica), ma soggiunge che, a suo avviso, l'estrazione di radice, piuttosto che alla logistica, appartiene alla teoria dei numeri e promette che a suo luogo esporrà in proposito quanto crede convenga allo studioso per la intelligenza delle cose, — *hae nobis nihil ad logisticen pertinere videtur, sed ad numerorum Theoremata, quae suo loco quantum studioso ea convenire arbitror ad rerum intelligentiam tradam.*

---

(1) L'A. non riporta a questo proposito alcun esempio, ma inversamente espone una regola generale, la quale corrisponde alla formola: $S = \frac{u\,r - a}{r - 1} = \frac{a\,r^n - a}{r - 1} = a\,\frac{(r^n - 1)}{r - 1}$.

Cap. XXIII.

Come si possano eseguire, con monete disposte sopra linee, le medesime operazioni della logistica (1).

L'A. premette in questo capitolo che tutte quelle parti della logistica che furono fino ad ora esposte con numeri rappresentati da cifre, si possono anche effettuare in una certa maniera più volgare ed anche più facile *(crassiore quodam et faciliore modo)*, adoperando linee e monete, le linee per significare gli ordini, le monete per esprimere i numeri. — Riporto, pressochè letteralmente ed integralmente tradotto, quanto intorno al curioso ed interessante argomento scrive l'A.:

Procedendo dal sotto in su, la prima linea esprime i numeri semplici, cioè le unità, la seconda le decine, la terza le centinaja, la quarta le migliaja, la quinta le decine di migliaja, la sesta le centinaja di migliaja, la settima le decine di centinaia di migliaia, ossia le migliaja di migliaja (modernamente: i milioni). — Lo spazio poi compreso fra due linee successive rappresenta la metà dell'ordine rappresentato dalla linea superiore ed il quintuplo dell'ordine significato dalla linea inferiore. Così, ad esem-

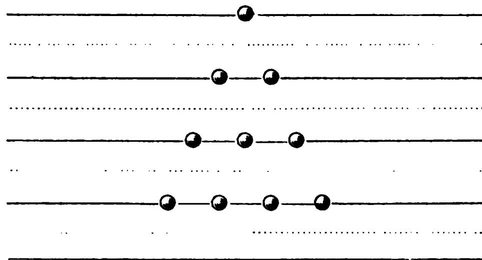
(1) *Quemadmodum eaedem partes logisticae lineis ac nummis per eas distributis expediantur.*

pio, lo spazio che sta sotto alla prima linea rappresenta la metà di uno, lo spazio fra la prima e la seconda esprime 5, lo spazio fra la seconda e la terza 50, lo spazio fra la terza e la quarta 500 e così di seguito, come risulta dal quadro seguente:

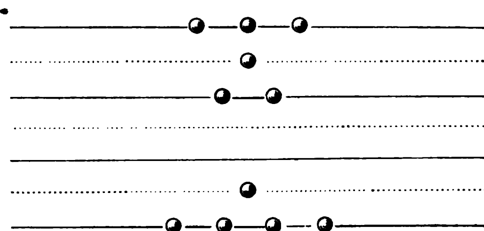
————————————————	= 100000
50000	
————————————————	= 10000
5000	
————————————————	= 1000
500	
————————————————	= 100
50	
————————————————	= 10
5	
————————————————	= 1
$^1/_2$	

Quante sono le monete poste nella prima linea significano tante volte *uno*. — Quante sono le monete poste nella seconda linea significano tante volte *dieci*. — Quante sono le monete poste nella terza linea significano tante volte *cento*. — Quante sono le monete poste nella quarta linea significano tante volte *mille* e così di seguito nella medesima maniera successivamente, avvertendo che le monete poste negli spazi interlineari significano rispettivamente dal sotto in su tante volte 5, tante volte 50, tante volte 500, ecc. e per tal modo con queste par-

ticolari disposizioni di monete si riesce a rappresentare i numeri, come prima gli abbiamo rappresentati con le cifre. Così, ad esempio, la rappresentazione:



esprime il numero 12340; mentre nella rappresentazione seguente:



gli spazi interlineari si devono aggiungere alla linea immediatamente inferiore, per la qual cosa si ottiene significato il numero 3709 (1).

(1) Ho segnato negli spazî intermedi con una linea punteggiata il luogo, nel quale devono essere collocate le monete per esprimere cinque volte quello che significherebbero se collocate sopra la linea principale inferiore immediatamente sottoposta. Del resto l'HANKEL (pag. 52 e 53, op. cit.), parlando della

ADDIZIONE. — È operazione molto facile: Se in qualche linea (dal raccoglimento delle monete esercitato dal basso in alto nei numeri proposti) risultano 5 monete, in loro vece se ne pone 1 nel superiore spazio interlineare, e ogni 2 monete collocate nello spazio interlineare se ne pone 1 nella linea immediatamente superiore. Il seguente prospetto rappresenta l'addizione dei numeri 7436 e 5835:

Primo numero Secondo numero Risultato

La somma risultante è rappresentata dal numero 13271, infatti 7436 più 5835 è uguale a 13271.

---

tavola aritmetica di marmo trovata a Salamina e di altre tavole consimili certamente in uso anche presso i Romani *(Abacus)*, scrive appunto: *Sowohl diese Rechenbretter, als auch die salaminische Tafel haben, um eine zu grosse Anhäufung der Marken auf einer Linie zu vermeiden, die Einrichtung, dass sich zwischen den Hauptlinien noch andere befinden, welche der auf ihnen liegenden Marke einen Werth ertheilen, der das fünffache von dem beträgt, den sie auf der vorhergehenden Linie darstellen würde.* (Per evitare un troppo grande accumulamento di marche

Sottrazione. — Con uguale facilità, procedendo però dall'alto in basso, si eseguisce la sottrazione, perchè basta levare dal numero maggiore, segnato nel quadro delle linee, il numero minore che deve essere sottrato. Il seguente prospetto rappresenta la sottrazione dei due numeri 9000 e 7423:

Numero maggiore — Numero minore — Risultato

Prima di tutto si leva nella linea delle migliaia del numero maggiore quella moneta che si trova nello

---

sopra una sola linea, tanto sopra queste tavole aritmetiche, quanto su quella trovata a Salamina, sono segnate fra le linee principali delle altre linee intermedie, le quali dànno alla marca collocata sopra di esse un valore uguale a cinque volte quello che avrebbe se si trovasse sulla linea principale immediatamente sottoposta alla intermedia). — Questo sistema, che ricorda la più antica grafica significazione dei Greci con le cifre, semplifica straordinariamente la rappresentazione dei numeri con linee e monete, perchè permette che sulle linee principali possano al massimo riuscire raccolte *quattro* monete e sulle intermedie *una* sola. Se questi numeri sono sorpassati si deve evidentemente fare un trasporto di monete nella linea immediatamente superiore.

spazio interlineare immediatamente sovrastante alla linea che rappresenta l'ordine delle migliaia e successivamente si levano 2 monete nella linea immediatamente sottoposta a questo spazio: in questa linea adunque, che prima conteneva 4 monete, ne restano ora soltanto 2. Una qualsivoglia di queste due monete rappresenta 1 migliaio che vale 10 centinaia; levo da queste 10 centinaia le 4 del numero minore e ci restano 6 centinaia che si rappresentano con una moneta nella terza linea ed una nello spazio interlineare immediatamente sovrapposto, e nella quarta linea ci resta definitivamente *un* solo migliaio. Una qualsivoglia delle 6 centinaia vale 10 decine, dalle quali levando le 2 decine del numero minore restano otto decine che si rappresentano con 3 monete nella linea delle decine ed una nello spazio interlineare immediatamente superiore; definitivamente ci rimangono *cinque centinaia* segnate nello spazio interlineare immediatamente sovrapposto alla terza linea. Ma una qualsivoglia di queste decine vale dieci unità, dalle quali levando le 3 unità del numero minore abbiamo *sette* unità e le decine restano definitivamente *sette*. Riassumendo, il residuo domandato è un numero che comprende 1 migliaio, 5 centinaia, 7 decine e 7 unità, cioè è il numero 1577, che troviamo significato alla destra del prospetto, ed infatti 9000 meno 7423 è uguale a 1577.

Moltiplicazione. — Questa operazione si eseguisce con la tavola divisa come in due parti, dopo

aver collocato a sinistra, rappresentato come fu detto con monete, il numero moltiplicando ed avere segnato il moltiplicante fuori della tavola, significato in qualche speciale maniera, avvertendo che questo moltiplicante si può anche ritenere a memoria (1). Alla destra della tavola comporremo il richiesto prodotto col procedimento che adesso si espone:

Sia da moltiplicarsi 2468 per 14. — Si pone il dito della nostra mano all' estremità della linea nella quale vi sono le monete del massimo ordine del moltiplicando (migliaia), si suppone per un momento che questa sia la prima linea rappresentante l'ordine delle unità, nella quale ogni moneta indicata ora dal dito significherebbe soltanto *uno*. Poichè ognuna deve essere ripetuta *quattordici volte* (quaterdecies), si deve trasportare ciascuna delle *due* monete del moltiplicando alla destra della tavola nella linea immediatamente superiore ed inoltre collocare per ognuna di esse, sempre alla destra della tavola, sulla medesima linea significata col dito della nostra mano, *quattro* monete, complessivamente *otto*. — Si porta il dito della mano sulla linea immediatamente inferiore, rappresentante le centinaia nella quale vi sono 4 monete e per ognuna di queste se ne collocano 14 nella parte destra della tavola e 7

(1) L'A. scrive precisamente: *multiplicantem creta aut rubrica extra tabulam nota, aut mente concipe.*

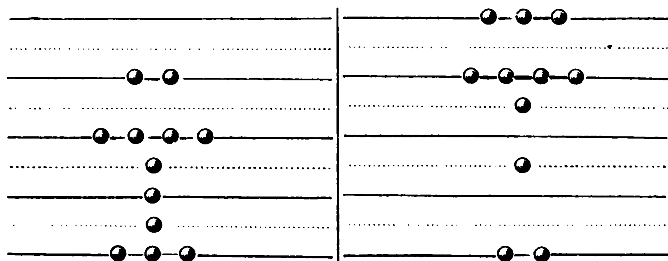
per quella che nel moltiplicando si trova nel sottostante spazio interlineare.

Prima di procedere, avverto che, nella significazione del prodotto, possono effettuarsi delle successive semplificazioni; così, ad esempio, in luogo di collocare otto monete sulla linea delle migliaia, se ne possono collocare soltanto 3 ed 1 collocarla nello spazio interlineare sovrapposto, invece di collocare 16 monete sulla linea delle centinaia se ne può ritenere 1 soltanto su questa linea, 1 nello spazio interlineare sovrapposto ed 1 ancora nella linea delle migliaia, e ricordo che queste semplificazioni possono andar soggette a nuove ulteriori semplificazioni per gli ulteriori risultati dell' operazione.

Ciò premesso, per seguitare la incominciata operazione, bisogna collocare il dito sulla seconda linea rappresentante le decine sulla quale sta 1 sola moneta e, come è stato detto precedentemente, trasportarla alla destra della tavola nella linea immediatamente superiore, collocando però nella medesima linea significata dal dito altre 4 monete, ed in questa stessa linea poi (per quella che nel moltiplicando sta nello spazío interlineare immediatamente sottoposto) si collocheranno 7 monete. — Finalmente si trasportano nella medesima maniera alla destra della tavola le 3 monete che stanno nella prima linea del moltiplicando, segnandone come al solito 14 per ognuna di esse ed eseguendo tutte le possibili semplificazioni.

Il seguente quadro rappresenta la moltiplicazione di cui si tratta, dopo avere eseguite nel prodotto tutte le possibili corrispondenti semplificazioni:

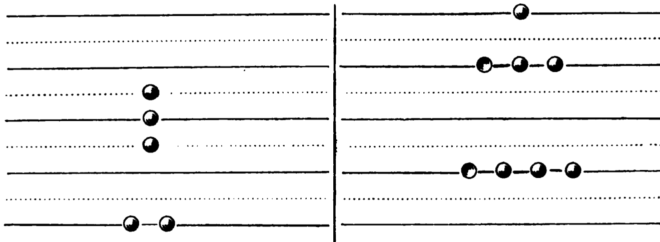
Numero moltiplicando (Moltiplicante = 14) Numero prodotto.



Il prodotto è uguale a 34552, e infatti 2468×14=34552

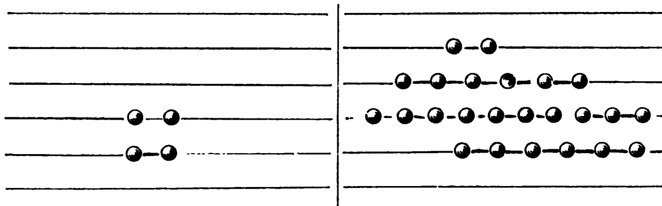
L'A. a questo punto, per evitare facili errori, richiama l'attenzione del letttore sopra questa importantissima norma: Quando nel moltiplicando la moneta si trova in uno spazio interlineare, il dito significante deve essere mantenuto fermo sopra la linea immediatamente sovrapposta a quello spazio, alla destra della tavola poi sopra questa medesima linea si trasportano per quella moneta tante monete quante la metà del numero moltiplicante. — Così, ad esempio, per la moltiplicazione di 652 per 20, si avrà il quadro seguente:

Numero moltiplicando (Moltiplicante = 20) Numero prodotto.

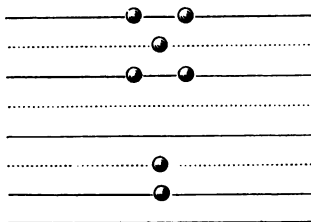


La moltiplicazione di 220 per 123 sarebbe nel suo originario risultato rappresentata dal quadro seguente:

Numero moltiplicando (Moltiplicante = 123) Numero prodotto.



Il prodotto semplificato assume la forma seguente:

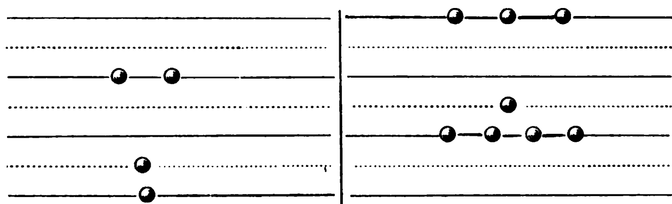


= 27060, e infatti
220 × 123 = 27060.



Per la moltiplicazione di 206 per 15 si avrebbe il quadro seguente:

Numero Moltiplicando (Moltiplicante = 15) Numero prodotto

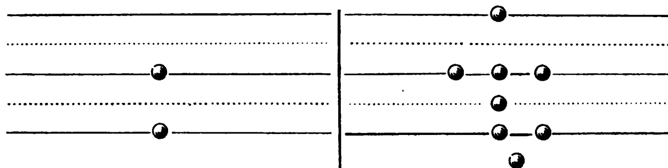


eguale a 3090, ed infatti 206 × 15 = 3090.

L' A. finalmente, riguardo alla moltiplicazione, avverte che con questo speciale sistema si può eseguire la moltiplicazione di un numero intero per un altro numero seguito da $\frac{1}{2}$ unità, ed anche di due numeri seguiti ciascuno da $\frac{1}{2}$ unità, come ad esempio 11 per 12 $\frac{1}{2}$, oppure 22 $\frac{1}{2}$ per 16 $\frac{1}{2}$; *id quod* (osserva l'A.) *descriptis notis fieri non potest* — « ciò che colle figure già descritte, cioè colle figure indo-arabiche o coi simboli romani, non si può fare ».

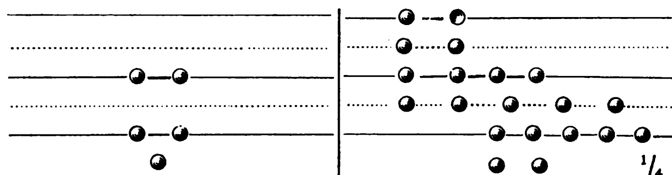
Ecco i quadri corrispondenti a queste due ultime speciali moltiplicazioni:

Numero moltiplicando (Moltiplicante $= 12\frac{1}{2}$) Numero prodotto



Il prodotto ottenuto è $137\frac{1}{2}$, e infatti $11 \times 12\frac{1}{2} = 11 \times \frac{25}{2} = \frac{275}{2} = 137\frac{1}{2}$.

Numero moltiplicando (Moltiplicante $= 16\frac{1}{2}$) Numero prodotto



Fatte nel prodotto, originariamente trascritto, le opportune semplificazioni esso assume la seguente forma:

$= 371\frac{1}{4}$, e infatti $22\frac{1}{2} \times 16\frac{1}{2} = \frac{45}{2} \times \frac{33}{2} = \frac{1485}{4} = 371\frac{1}{4}$.

Divisione. — L' A. incomincia avvertendo che questa operazione si eseguisce in una maniera opposta a quella tenuta per effettuare la moltiplicazione, e precisamente procedendo dalla destra della tavola verso la sinistra, dopo avere collocato il numero dividendo nello scompartimento a destra. Ma, ciò premesso, la sua particolareggiata esposizione illustrativa riesce così eccezionalmente confusa, oscura ed inesatta che io penso riportare soltanto i quadri corrispondenti ai casi dall'A. considerati e risolti. — Si comprende che per facilità di operazione le unità di un dato ordine del dividendo vengono trasformate in unità di ordine inferiore sostituendo ad una moneta collocata sopra una linea determinata due monete poste nel sottostante spazio interlineare e 5 monete poste nella linea immediatamente inferiore. Torna allora più facile il determinare quante volte il divisore può essere levato dal dividendo e segnare questo numero di volte con altrettante monete nel luogo riservato al risultato.

Esempio I:

Risultato (Divisore = 38) Numero dividendo

Il risultato è 18, e infatti 684: 38 = 18.

Esempio II:

Risultato (Divisore = 8) Numero dividendo

Il risultato è 56, e infatti 448 : 8 = 56.

Esempio III:

Risultato (Divisore = $2\frac{1}{2}$) Numero dividendo

Il risultato è 112, e infatti $280 : 2\frac{1}{2} = 112$.

L' A. termina questo capitolo avvertendo che quando si presenta il caso di dividere per 12, si può invece dividere per 3 e segnare la *quarta* parte soltanto di quello che risulterebbe. Così, ad esempio, essendo proposta la divisione di 3330 per 12, si avrebbe il quadro seguente:

Risultato (**Divisione = 12**) **Dividendo**

Il risultato è $277 \frac{1}{2}$, e infatti $3330 : 12 = 277 \frac{1}{2}$.

*
* *

OSSERVAZIONE. — Chi voglia in realtà ripetutamente esercitarsi in questo speciale sistema di calcolo sopra numeri rappresentati con linee e monete, troverà, dopo un certo esercizio, che esso riesce molto più facile e piacevole di quello che a leggerne semplicemente la descrizione potrebbe sembrare.

CAP. XXIV.

DELLE PARTI DI UN NUMERO INTERO, CHE ALCUNI CHIAMANO: FRAZIONI.

L' A. incomincia questo capitolo dichiarando che parlerà brevemente delle frazioni, ossia delle parti degli interi, ed avverte subito che sebbene l' unità

per sua natura non sia divisibile (1), tuttavia quando essa si riferisce a cose aventi peso o grandezza (estensione), dalla ripartizione di queste cose (come ha scritto Aristotile) nasce un certo numero, il quale per se stesso contiene unità intere che non derivano dalla unità aritmetica, ma dalla divisione della grandezza, la quale secondo i filosofi si può dividere all' infinito — *tum ex earum rerum sectione (ut Aristoteles scripsit) numerus quidam nascitur, qui per se unitates continet integras, quae non ex arithemica unitate nascuntur, sed magnitudinis sectione, quae per infinita juxta philosophos est divisibilis.*

Successivamente l' A. espone in qual maniera si rappresentano le frazioni graficamente $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \text{ecc.}\right)$ (2) e, dopo avere ricordato che si usano molto frequentemente nell' Astronomia e

---

(1) V. a questo proposito le osservazioni a pag. 4 del mio *Trattato di Aritmetica per le Scuole secondarie* (op. cit.) e a pag. 29 della mia opera: *L' insegnamento della Matematica nelle scuole primarie e popolari ecc.* (Verona, Padova, fratelli Drucker, 1898) — Vi si afferma che il *numero* per la sua originaria natura è essenzialmente intero.

Il concetto di numero frazionario è certamente derivato dalla necessità di rappresentare in qualche maniera il risultato di una divisione non esatta.

(2) Il SAIGEY, nella sua pregevole *Arithmétique théorique* (Paris, 1853) assicura che le frazioni a due termini erano già

nella Geografia, conclude che gioverà per conseguenza trattare anche delle operazioni sulle frazioni.

La somma delle frazioni, quando hanno il medesimo denominatore, si determina raccogliendo in un numero solo i numeratori, così ad esempio la somma delle frazioni $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{3}$ sarà $\frac{16}{3} = 5\,\frac{1}{3}$.

Per sapere poi quanti interi vi sono eventualmente in una certa frazione, bisogna dividere il numeratore per il denominatore, dunque $\frac{16}{3}$ contiene 5 interi ed $\frac{1}{3}$.

Considerando il caso che sieno proposte per l'addizione frazioni di denominatore diverso come $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$ l'A. insegna a determinarne la somma colla

note agli Egiziani, i quali le scrivevano come le scriviamo noi con simboli numerici naturalmente differenti separati con una linea arcuata. — Sul modo con cui erano significate le frazioni presso i Greci si può osservare NESSELMANN (*Geschichte der Algebra.* — Berlino, 1842). Giova ricordare però che, tanto presso i Greci, quanto presso i Romani, l'uso delle frazioni era poco esteso perchè i sottomultipli delle misure, dei pesi e delle monete, fatti secondo il numero 12, erano considerati come nuove unità più piccole.

La lineetta adoperata per separare il numeratore dal denominatore sembra essere stata introdotta in Europa insieme colle cifre indo-arabiche da Leonardo Pisano, (secolo XIII). — Secondo alcuni la lineetta altro non è che la deformazione della lettera *f* scritta obbliquamente, la quale aveva il significato di *fratto*.

seguente regola particolare: « moltiplica 7 per 3 e avrai 21, moltiplica 5 per 4 e avrai 20, congiungendo 21 con 20 avrai 41, futuro numeratore; moltiplica adesso 7 per 4 e avrai 28 denominatore della risultante frazione, che per conseguenza sarà $\frac{41}{28}$, cioè 1 intero e $\frac{13}{28}$, vale a dire (scrive l'A.) 1 intero e $\frac{1}{2}$, se al $\frac{13}{28}$ si aggiungesse ancora $\frac{1}{28}$, perchè quando il denominatore contiene 2 volte il numeratore la frazione esprime $\frac{1}{2}$, come $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ ».

Passando alle altre parti del numerare, cioè alla sottrazione, alla moltiplicazione e alla divisione, l'A. afferma che queste operazioni sono molto facili quando le frazioni proposte hanno il medesimo denominatore, mentre quando non hanno il medesimo denominatore, bisognerà ridurre prima le frazioni proposte al medesimo denominatore.

L' A. termina questo capitolo ricordando che vi sono anche frazioni di frazioni, come ad esempio due terze parti di un sesto, oppure due quinte parti di tre settimi, frazioni che si rappresenterebbero scritte nella seguente maniera:

$$\frac{2}{3} \text{ di } \frac{1}{6}, \ \frac{2}{5} \text{ di } \frac{3}{7}.$$

Queste espressioni si riducono a una sola espressione moltiplicando fra loro i numeratori e fra loro i denominatori, avremo: $\frac{2}{18}$ e $\frac{6}{35}$. Considerando la frazione $\frac{2}{18}$, avverte che semplificando *(reducitur et major denominatio ad minorem)*, si ottiene $\frac{1}{9}$ e successivamente insegna la seguente regola generale: « trova un numero per il quale si possa esattamente dividere tanto il numeratore quanto il denominatore e dividi per questo numeratore e denominatore ». Volendo semplificare la frazione $\frac{60}{90}$ osservo che 60 diviso per 6 diventa 10 e 90 diviso per 6 diventa 15, analogamente 10 diviso per 5 diventa 2 e 15 diviso per 5 diventa 3, dunque la frazione $\frac{60}{90}$ diventa $\frac{2}{3}$.

E per converso una frazione avente un determinato denominatore si può trasformare in altra equivalente avente denominatore diverso (multiplo); volendo trasformare il $\frac{2}{3}$ in *sesti*, si moltiplica 6 per 2, avremo 12, che diviso per 3 dà 4 numeratore cercato della nuova frazione $\frac{4}{6}$.

Osservazione. — In questo capitolo l' A. evidentemente non è nè troppo chiaro, nè troppo esatto. Nell' addizione di frazioni aventi denominatore diverso, considera un caso affatto particolare ed espone una regola, la quale nasconde la norma generale per ridurre più frazioni al medesimo denominatore; successivamente afferma che non si possono eseguire moltiplicazioni o divisioni di frazioni aventi denominatore diverso, se prima queste frazioni non sieno ridotte al medesimo denominatorc, il che assolutamente non è conforme al vero e notisi che ciò era risaputo anche all' epoca in cui è stato pubblicato questo libro, come si può riconoscere dalle opere di Leonardo Pisano e di F. Luca Paccioli, mentre nel testo il Noviomago scrive precisamente: *sed si fuerint fractiones et denominatores diversi, neque dividi multiplicari ne possint, nisi redactis ijs ad communem denominatorem;* finalmente considera le frazioni di frazioni, senza avvertire che questi casi essenzialmente si riducono alla moltiplicazione di due frazioni.

Cap. XXV.

Regola delle proporzioni altrimenti detta: del tre.

L'A. in questo capitolo incomincia coll' avvertire che tutte le nozioni di logistica date fino ad ora sono come gli strumenti ordinariamente destinati

alla risoluzione dei problemi numerici; bisogna adesso raccoglierne l'uso in alcune regole, delle quali la prima (la più importante) è la regola delle proporzioni, che ora corrottamente chiamano *del tre.* *(Nunc reliquum est usum eorum regulis quibusdam perstringamus, quarum prima est regula proportionum, quam nunc corrupte vocant Detri).* — La *regola del tre* è quell'operazione per mezzo della quale, dati tre numeri se ne trova un quarto, fra il quale ed il terzo vi sia quell' istessa proporzione (ragione, rapporto) che fra il primo ed il secondo. Il primo numero, il più delle volte, esprime la quantità della cosa comperata, il secondo il prezzo ed il terzo ciò che corrisponde alla quantità proposta nel problema, come nel seguente esempio: 4 moggi si comperano con 3 monete, conseguentemente 20 moggi con quante monete si compreranno? — Bisogna trovare il quarto numero che risolve il problema. Si osserva di quale specie sia la proporzione fra il primo ed il secondo numero; nel nostro caso è *sesquiterza* (1), dunque bisogna che il quarto numero sia tale che la proporzione fra il terzo ed il quarto sia pure *sesquiterza*: il numero cercato è il 15, infatti il 20 supera il 15 di una terza parte di 15 come il 4 supera il 3 di una terza parte di 3.

---

(1) V. il capitolo IV del II Libro.

L' A. successivamente insegna che se la proporzione fra il primo ed il secondo numero non si può subito riconoscere a mente, si deve moltiplicare il terzo numero per il secondo e dividere il prodotto per il primo; raccomanda la diligenza nell'ordinata disposizione dei numeri e ricorda che talvolta bisogna prima risolvere le misure maggiori in minori affinchè tutte abbiano eguale denominazione.

Il capitolo termina con queste due importanti osservazioni:

A) questa regola può anche essere adoperata inversamente, come nel seguente esempio: 4 libre di pane si vendono per trenta monete, quando il frumento costa 100, quante libre di pane si potranno comperare con trenta monete, quando il frumento costa 90? Questi numeri secondo l'ordine volgare si scriverebbero così: 100 assi (1) danno 4 libre, quante libre 90 assi? Bisogna invertirne l' ordine nella seguente maniera: 90 danno 4 libre, quante ne daranno 100? e si ottiene il numero $4 \frac{4}{9}$, che risolve la questione proposta (2).

---

(1) L' *asse* (as, assis) in generale è il tutto considerato come unità, diviso in 12 *unciae;* in particolare, come moneta, *asse* era originariamente una libbra *(as libralis)*, ma dal 275 av. Cristo fu ridotto a $\frac{1}{36}$ di libbra e ai tempi di Cicerone valeva circa 5 centesimi.

(2) L' A. ammette che il prezzo del pane dipenda soltanto dal costo del frumento, mentre dipende anche da altri elementi.

B) il corpo umano alto sette piedi eretto in piena luce manda un ombra di due piedi, per conseguenza se vuoi conoscere l'altezza delle cose erette verticalmente, come di un monte, di un albero, di un edificio, devi misurare l' ombra rispettivamente determinata *nel medesimo tempo* e il numero risultante colloca nel terzo posto e disponi gli altri in questa maniera: un ombra di 2 piedi risponde ad una altezza di 7, un ombra di 25 piedi (ad esempio) a quale altezza risponderà? risulteranno piedi 87 $\frac{1}{2}$ come altezza di quell' edificio, la cui ombra è di 25 piedi (1).

Cap. XXVI.

Come deve essere applicata la regola precedente, se alcuni dei numeri proposti contengano frazioni (2).

Questo capitolo può essere considerato come una continuazione del capitolo precedente, perchè si considerano quei casi della regola del tre, in cui uno

(1) Tutto ciò evidentemente per la somiglianza di due triangoli rettangoli. — Si ascrive ordinariamente la scoperta di questo speciale procedimento, diretto a determinare l'altezza dei corpi dalla lunghezza dell' ombra proiettata, a Talete, uno dei sette Sapienti della Grecia, il fondatore della Scuola Jonica, che fiorì circa 600 anni a. Cr.

(2) *Quomodo agendum sit si qui numeri ex praedictis fractiones contineant.*

o più numeri dati invece che interi sono frazionari, cioè sono numeri interi insieme a frazioni. — L'A. prende in esame molti casi particolari, affinchè ne abbia a sgorgare implicitamente la regola generale. Suppone in primo luogo che sia successivamente frazionario il primo numero dato, il secondo numero dato e il terzo numero dato. In secondo luogo suppone che sieno successivamente frazionari il primo numero dato ed il medio, il medio ed il terzo numero dato, tutti e tre i numeri dati. — Tutti questi casi si risolvono incorporando prima gli interi nelle corrispondenti frazioni e riducendo dopo al medesimo denominatore [che si sopprime] o i due antecedenti della proporzione, oppure i due termini del primo rapporto, oppure tutti e tre i numeri dati. Sceglieremo due degli esempî presi in esame dall'A.

Esempio I: Se 5 danno 7, 8 $\frac{1}{2}$ quanto daranno? 2 volte 8 fa 16, a cui aggiungendo il numeratore si ha 17, dunque 8 $\frac{1}{2}$ vale $\frac{17}{2}$, che raddoppiato diventa 17. Ora raddoppiando anche il 5 si ottiene 10. Diremo adunque: Se 10 danno 7, quanto daranno 17? — Risposta: 11 $\frac{9}{10}$.

Esempio II: Se 3 $\frac{1}{2}$ danno 6, quanto daranno 6 $\frac{2}{3}$? Incorporando gli interi nelle corrispondenti

frazioni il primo numero diventa $\frac{13}{4}$ e il terzo numero diventa $\frac{20}{3}$; riducendo ora questi due numeri al medesimo denominatore abbiamo $\frac{39}{12}$ e $\frac{80}{12}$, per la qual cosa potremo dire: Se $\frac{39}{12}$ danno 6, $\frac{80}{12}$ quanto daranno? o meglio: Se 39 danno 6, quanto daranno 80? — Risposta: $12\frac{4}{13}$.

Cap. XXVII.

Divisione di un numero in parti disuguali.

Mentre nel precedente capitolo XX si tratta della divisione di un numero in parti uguali, in questo si tratta della divisione di un numero in parti disuguali, e precisamente in parti proporzionali a numeri dati (regola di ripartazione). L' A., seguendo il metodo, tenuto nei capitoli precedenti, propone e risolve vari problemi particolari che si riferiscono tutti in diversa maniera all' argomento considerato.

Problema I. — Il generale supremo dell' esercito ricevette dalla Repubblica dieci centinaja di migliaia di monete (modernamente un milione = 1000000) da distribuire ai quattro ordini di una legione, in modo che gli appartenenti al primo ordine ricevano il triplo rispetto agli appartenenti al secondo ordine,

gli appartenenti al secondo ordine il doppio rispetto agli appartenenti al terzo e gli appartenenti al terzo ordine in ragione sesquialtera (1) rispetto agli appartenenti al quarto, cioè quelli tante volte 3 quante questi 2. Si domanda quante monete toccano a ciascun ordine. — Se il quarto ordine prende 2, il terzo prende 3, il secondo 6 e il primo 18. La somma di questi quattro numeri è 29; si divide 1 000 000 per 29 ed il quoto risultante, moltiplicato rispettivamente per 18, 6, 3, 2, rappresenterà quante monete spettano a ciascun ordine della legione.

Problema II. — Un tale, che morì lasciando la moglie gravida, prescrisse con testamento che se fosse nato un figlio fosse data alla moglie la terza parte della sostanza ed il resto al figlio, e se invece fosse nata una figlia fosse data la terza parte della sostanza alla figlia ed il resto alla madre. La madre partorì due gemelli, un maschio ed una femmina. Si domanda: come deve essere ripartita quella sostanza perchè resti osservata l'intenzione del testatore? — Il testatore voleva che la madre avesse sostanza doppia rispetto alla figlia e metà sostanza rispetto al figlio, dunque se la figlia ha 1, la madre deve avere 2 e il figlio 4. Per conseguenza basterà dividere tutta la sostanza in tre parti rispettivamente proporzionali ai numeri 4, 2, 1.

---

(1) V. il cap. V del libro II.

Problema III. — Tre persone in una comune impresa arrischiarono, il primo 100 monete, il secondo 80 monete e il terzo 70. Guadagnarono 60 monete; quanto tocca a ciascuno di questo guadagno? — È una regola di società semplice che si risolve colla regola di ripartizione, cioè dividendo il 60 in tre parti proporzionali ai numeri 100, 80, 70, ossia ai numeri 10, 8, 7.

Problema IV. — Nella esposizione della somma (esempio precedente) siavi ineguaglianza di tempo, e precisamente le 100 monete del primo furono esposte per mesi 9, le 80 monete del secondo per mesi 7 e le 70 monete del terzo per mesi 5. Quanto tocca a ciascuno delle 60 monete guadagnate? — È una regola di società composta, che si trasforma in semplice, moltiplicando per ogni persona il numero che esprime la somma impegnata per il numero che esprime il tempo corrispondente dell' esposizione. — Dopo si opera come precedentemente.

Problema V. — Se un' anfora di un certo vino costa 12 e di un altro 20, si domanda in quale maniera (rapporto) si debbano mescolare questi due vini di valore diverso, perchè un' anfora della mescolanza costi 14 (regola di miscuglio). — Il numero massimo supera il medio di 6 ed il numero medio supera il minimo di 2, la somma di queste due differenze è 8. Ora dividendo ciascuna differenza per questo numero 8, si ottiene $\frac{6}{8}$ e $\frac{2}{8}$; il primo

numero $\frac{6}{8}$ esprime quanto si deve prendere del vino meno valente ed il secondo numero $\frac{2}{8}$ quanto si deve prendere del vino più valente. Bisognerà dividere la capacità dell' anfora in due parti rispettivamente proporzionali ai numeri $\frac{6}{8}$ e $\frac{2}{8}$, oppure ai due numeri 6 e 2. — *Quo loco* (nota l'A.) *si numerus dividendus sit minor divisore, divisio per fractionem explicanda est, id quod huic regulae proprium erit.*

Osservazione generale.

Prima di imprendere la esposizione del libro secondo, che tratta della teoria dei numeri, sarà bene rivolgere il nostro pensiero alle nozioni svolte intorno alla logistica in questo primo libro e fare in proposito le seguenti considerazioni:

I precetti della numerazione e del calcolo vi sono semplicemente affermati, senza le corrispondenti dimostrazioni, come del resto era costume nel 1500 presso tutti gli insegnanti di scientifiche discipline, e come questi il nostro A., in una determinata questione, considera pure successivamente molti casi particolari, affinchè ne riesca affermata implicitamente la legge generale.

Da ogni capitolo di questo primo libro del Noviomago, in mezzo alle evidenti deficienze, traspare un desiderio continuo di filosofica esattezza, che è e sarà sempre il pregio fondamentalc della Matematica, la sola disciplina, a mio avviso, che meriti realmente incontrastato il nome di scienza; le frequenti discussioni obbiettivamente serene, anche quando il nostro A. giunge a conclusioni erronee od inesatte, ne sono una irrefragabile prova.

Ogni capitolo rivela da una parte un grande rispetto per i sommi matematici che precedettero il nostro A., l'autorità dei quali egli frequentemento invoca a conforto delle sue affermazioni, e dall'altra una cura costante ed affettuosa per i giovani studiosi, ai quali, con quello spirito pregevole d'umanesimo che era diffuso nelle scuole del medio evo, egli cerca di rendere in mille maniere meno difficile l'importante disciplina.

E infatti tutto questo primo libro riluce per una ragguardevole genialità didattica giustificata dal fatto che il Noviomago, dopo avere dimostrato con rara efficacia la utilità e necessità della logistica, non si limita punto ad esporne aridamente i precetti, ma questa esposizione egli rende particolarmente leggiadra con piacevoli raffronti ed opportune digressioni nelle lettere, nella storia, nelle scienze, esempio codesto che anche nelle nostre scuole dovrebbe essere saggiamente imitato, ricordando le multiformi

applicazioni della matematica alle scienze ed alle arti e rievocando il nome di coloro, che, nello svolgersi dei secoli, maggiormente concorsero al suo incessante e meraviglioso progresso.

Pregevoli in se medesimi ed anche per semplice curiosità storico-scientifica i capitoli XIII, XIV e XXIII, dei quali i primi due trattano della numerazione dattila (loquela delle dita) e l'ultimo del calcolo numerale fatto con linee e monete.

LIBRO SECONDO DELL'ARITMETICA
CHE TRATTA DELLA TEORIA DEI NUMERI

Questo secondo libro comprende un proemio e dieci capitoli (1); il proemio è dedicato al dottissimo uomo D. Andrea Eggerd di Rostock, e nei dieci capitoli successivi l' A., svolgendo principalmente le idee pitagoriche ed i concetti euclidei, tratta delle proprietà dei numeri che derivano dalla loro particolare struttura e, considerando successivamente l'unità e il numero, il numero pari e il numero impari, i rapporti dei numeri, i numeri figurati (lineari, piani e solidi), ecc. espone le corrispondenti leggi di loro composizione. — Nell' ultimo capitolo l' A. ricorda alcune curiose proprietà filosofiche riguardanti i successivi numeri dall' uno al dieci.

---

(1) I capitoli di questo secondo libro in realtà sono dieci, ma nel testo vi è evidentemente errore nella numerazione, perchè il capitolo successivo al capitolo IV (che dovrebbe essere segnato con V) è nuovamente segnato con IV; il capitolo successivo al capitolo VI è segnato con VIII e il capitolo successivo al capitolo VIII (che dovrebbe essere segnato con IX) è segnato nuovamente con VIII, mentre l' ultimo capitolo, che dovrebbe essere segnato con X, è significato invece col numero ordinale XI.

Proemio dedicato al dottissimo D. Andrea Eggerd di Rostock.

L' A. in questo proemio, prima di tutto ricorda che i precetti della Logistica esposti nel primo libro riescono necessari negli scambi ordinari della vita sociale ed utili talvolta anche in filologia, per la opportuna interpretazione degli scrittori; ma successivamente avverte tosto che, rispetto all' intima natura dei numeri, gioverà molto di più tutto quello che egli si propone di svolgere in questo secondo libro e che più propriamente si chiama *Aritmetica* (Teoria dei numeri). — L' Aritmetica, scrive l' A., arte di estrema acutezza (*ars immensae subtilitatis*), è stata esposta dagli altri scrittori in molti volumi, per la qual cosa io penso di doverne esplicare in questo secondo libro quelle nozioni soltanto che sono necessarie per preparare ai giovani, in brevissimo compendio, la via a studî maggiori. — Egli chiude il proemio con questa pregevole sentenza: *Nam ut non intima et acutissima quaeque analemmata studiosum, qui oratoriae arti aut juris Civilis cognitioni instituitur, aut etiam his maioribus perscrutatum velim, ita vicissim non eum ἀναριθμητικόν esse oportet.* (Perocchè come non domando che colui il quale si è consacrato allo

studio dell'arte oratoria, del diritto civile o di altra più importante disciplina, conosca a fondo tutte quante le più recondite e sottili proposizioni della scienza dei numeri, così per converso non trovo conveniente che egli ne sia affatto ignaro *(ἀναριθμητικόν)*.

Cap. I.

Che cosa s'intenda per unità e per numero. Divisione del numero (1).

Questo primo capitolo incomincia con la seguente ragguardevole proposizione: *Unitas omnis numeri principium est et mensura, nam ut reliquas res numero metimur, ita numeros unitate.* (L' *unità* è il principio e la misura di ogni numero, perchè come col numero misuriamo tutte le altre cose, così coll' unità misuriamo i numeri). Successivamente dopo avere riportato per l' *unità* le definizioni di Euclide e di Giamblico e per il *numero* la ingegnosa definizione di Aristotele (2), ricorda la principalissima distinzione dei numeri in *pari* ed *impari:*

---

(1) *Unitas quid sit et numerus, et quomodo dividatur.*

(2) Euclide nel libro VII dei suoi immortali elementi *(Euclidis Elementa — I. L. Heiberg* — Vol. II libros V-IX continens. Lipsia, B. G. Teubner, MDCCCLXXXIV) dà di *unità* la seguente definizione: *Unitas est ea, secundum quam una quaeque res una nominatur. (Unità* è quella, per la quale ciascuna

Par numerus est, iuxta Pythagoram, qui eadem divisione in maxima et minima partibilis est (1). — Secondo Pitagora, è *pari* quel numero che coll'istessa divisione si può scomporre in due parti, una massima e l'altra minima. — Il numero 12 è un numero pari, perchè con una sola e medesima divisione si può scomporre nelle due parti *2* e *6;* la prima è minima, l'altra è massima. — La parte minima è sempre rappresentata dal numero 2, perchè ogni numero pari è divisibile per 2, e la parte massima è rappresentata dal numero che mol-

---

delle cose, che sono, si chiama *una)*. — Giamblico lasciò scritto: *Unitas omnium principium est, radix et origo.* (L'*unità* è principio, radice ed origine di tutte le cose). — S. Tommaso insegna che l'unità è un tutto indivisibile e il principio di ogni numero, il quale non è altro che l'unità ripetuta. Infatti Euclide ha dato di numero la seguente definizione: *Numerus autem est multitudo ex unitatibus composita;* e il Paccioli (op. cit.) scrive: *Numero*, secondo ciascun filosofante, è una moltitudine composta di unità; *unità* è principio di ciascun numero, ma non è numero; secondo Boezio è numero in potenza. — Secondo Aristotele, *Numerus est ex unitatibus aggregata multitudo, discretorum mensura ac modus.*

Sarà bene che l'attento lettore raffronti sagacemente fra loro queste differenti definizioni di *numero* e di *unità* e ne discuta con animo sereno obbiettivamente i caratteri fondamentali — V. a questo proposito *Prof. Dott. G. Frizzo* — (L'Insegnamento della Matematica, ecc. op. cit. pag. 10 e seg.).

(1) Traducendo letteralmente si avrebbe: *È pari quel numero che coll'istessa divisione si può scomporre in parti massime e minime.*

tiplicato per 2, cioè ripetuto due volte, produce il numero proposto, ossia da ciascuna delle due metà del numero dato.

Impar qui id fieri non patiatur, seu qui in duas aequales partes divisus, medio unitatem habet intervenientem. — È *impari* quel numero nel quale ciò non si può fare, ossia quel numero che diviso per 2, vale a dire decomposto in due parti eguali, contiene nel mezzo interposta l' unità. Il numero 25 è impari, perchè decomposto in due parti eguali, ciascuna delle quali è 12, comprende ancora nel mezzo l'unità: $25 = 12 + 1 + 12$ (1).

---

(1) Più semplicemente EUCLIDE nel libro VII: *Par numerus est qui in duas partes aequales dividitur, impar autem qui in duas partes aequales non dividitur, sive qui unitate differt a pari numero;* e PACCIOLI, traducendo letteralmente: « *Paro* è quello che in doi eguali parti si po dividere, si commo 2. 4. 6. 8. 10, *imparo* è quello che in doi parti eguali non si po dividere e avanza el paro de una unità, comme 3. 5. 7. 9. 11. etc ».

La distinzione dei numeri in *pari* ed *impari* ha una grandissima importanza, la quale non isfuggì punto agli antichi. Infatti PLATONE diceva: « La scienza dei numeri non è altro che la ricerca del pari e del dispari ». E molto discussero gli antichi intorno alla particolare natura del numero *uno*, il quale, rigorosamente, non rispondeva come numero nè alla definizione pitagorica del pari, nè a quella del dispari. — Dovendo pure essere o pari o dispari, si può osservare che *uno* non è pari perchè indivisibile e per conseguenza esso deve essere dispari. — PITAGORA incominciava la serie dei numeri dispari col numero 3; ARISTOTELE pretendeva che il numero 1

Scritta la serie naturale dei numeri: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13, ecc. sorprenderemo i numeri impari procedendo dal primo termine in avanti alternativamente; avremo: 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, ecc., procedendo dal secondo nella medesima maniera si avrebbero i numeri pari: 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16, ecc. Se in una serie di numeri, fra due successivi dei quali la differenza costante sia 2, il primo è pari tutti gli altri sono pari; se il primo è impari tutti gli altri sono impari:

6. 8. 10. 12. 14. 16. 18 . . .
7. 9. 11. 13. 15. 17. 19 . . .

La somma di un numero pari di numeri dispari è un numero pari. La somma di un numero impari di numeri dispari è un numero impari. La somma dei quattro numeri 5. 7. 9. 15 è 36, numero pari. La somma dei tre numeri 11. 15. 21 è 47, numero impari.

Il numero impari moltiplicato per un numero pari produce un numero pari, moltiplicato invece

---

fosse ad un tempo e pari e dispari; ma s'ingannavano e l'uno l'altro, come osserva Teone di Smirne; infatti il numero 2 è pari ed il numero 3 è perfettamente dispari, ma il numero 3 si ottiene aggiungendo al numero 2 il numero 1, dunque il numero *uno* è dispari, perchè bisogna aggiungere un numero dispari ed un numero pari per trovare un numero dispari. (V. *M. Marie* op. cit. tom. I pag. 233).

per un numero impari produce un numero impari *(Impar parem multiplicans parem producit, sed impar imparem multiplicans imparem reddit).* Così ad esempio: 7 preso *due* volte dà 14 numero pari; 7 preso *tre* volte dà 21 numero dispari.

Cap. II.

Divisione del numero pari.

L' A. in questo capitolo distingue tre specie di numeri pari e insegna come si possano rispettivamente comporre i numeri pari di ciascuna specie. — Vi sono numeri *parimente pari*, numeri *parimente impari* e numeri *imparimente pari* (1).

Secondo l' Autore il numero *parimente pari* è quello che si può risolvere fino all' unità dividendolo successivamente in due parti eguali *(qui dissolutus est partibus usque ad unitatem aequaliter secabilibus).* Essenzialmente questi numeri rappresentano le successive potenze 1, 2, 3, 4, ... n, del numero 2; avremo la serie:

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128 . . . . ,

---

(1) Euclide, nel libro VII degli Elementi, non distingue il numero *imparimente pari*, perchè (come osserva P. Cossali, op. cit.) le sue definizioni non lo ammettevano. Per conseguenza ciò che Euclide divide in due specie il nostro A., seguendo la tradizione pitagorica, divide in tre. (V. *Teone di Smirne* e *Paccioli*, opere cit.).

nella quale prendendo un termine qualunque, ad esempio il numero 16, troviamo che la metà di 16 è 8, la metà di 8 è 4, la metà di 4 è 2 e finalmente la metà di 2 è 1. I numeri parimente pari si compongono moltiplicando l' unità per 2 e il prodotto risultante ancora per 2, e il nuovo prodotto ancora per 2 e così di seguito sempre nella medesima maniera indefinitamente — *(Nascitur hic ab unitate in infinitum progrediens, per prioris numeri geminationem)* (1).

Il numero *parimente impari* è quello che diviso

---

(1) La definizione di LUCA PACCIOLI concorda con quella del nostro A. — Secondo EUCLIDE: *Pariter par est numerus quem par numerus metitur secundum parem numerum.* (Il numero *parimente pari* è quel numero, che un numero pari può dividere in un numero pari di parti eguali). — Secondo questa definizione, intesa nel suo senso letterale, il 24, ad esempio, sarebbe un numero parimente pari, perchè diviso per 4 dà per risultato 6, che è pure un numero pari; quando però Euclide insegna che, per determinare i successivi numeri parimente pari, bisogna, incominciando dal numero 1, adoperare continuamente la proporzione dupla, allora è facile accorgersi che con la precedente definizione egli ha inteso di significare che dividendo il numero proposto per un conveniente numero pari si deve sempre ottenere per risultato un numero pari fino ad esaurire per successive divisioni il numero proposto e trovare per ultimo risultato l' unità. — TEONE DI SMIRNE afferma che i numeri *parimente pari* sono quelli che si possono scomporre continuamente in numeri pari.

per *due* determina le specie dei numeri impari (1). I numeri parimente impari si formano appunto raddoppiando i numeri impari scritti nel loro ordine naturale — *(Producitur ab imparibus naturali ordine se consequentibus et binario numero geminatis).*

I numeri dispari scritti nel loro ordine naturale dànno la serie: 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13 . . . . , raddoppiando ciascuno di questi termini avremo i numeri *parimente impari*: 2. 6. 10. 14. 18. 22. 26 . . . . , ognuno dei quali si può dividere una volta sola per 2. Tra due successivi termini di questa ultima serie passa costantemente una differenza eguale a 4 e possono essere interposti tre successivi numeri distinti (2).

---

(1) Veramente l'A. scrisse: *Pariter impar est qui per maxima divisus, imparium numerorum species constituit*; traducendo letteralmente si avrebbe: « *Parimente impari* è quel numero, che diviso in due eguali massime parti genera le specie dei numeri dispari ».

(2) Secondo Euclide: *Pariter impar est quem par numerus secundum imparem numerum metitur.* (Il numero *parimente impari* è quello che diviso per un numero pari dà per risultato un numero impari). Questa definizione riceve maggior luce e concorda con quella del nostro A. e con quella di Luca Paccioli (*Pariter impar* è quel numero che non si può che una sola volta partire per 2), quando si considera il procedimento esposto successivamente per determinare i numeri *parimente impari.* — Teone di Smirne lasciò scritto: *Parimente impari* è quel numero, che, diviso per 2, dà un quoziente impari.

È numero *imparimente pari* quello che, diviso per *due,* dà un numero il quale si può ancora successivamente dividere per 2, ma non fino ad arrivare all'unità *(Impariter par numerus est qui et sua et partium divisione aequali ad unitates pervenire nequit).* Il numero 72 è imparimente pari, perchè la metà di 72 è 36, la metà di 36 è 18, la metà di 18 è 9, numero al quale devo arrestarmi, senza poter giungere al numero 1. Il numero *imparimente pari* partecipa del parimente pari e del parimente impari; concorda parzialmente coi numeri parimente pari, perchè si lascia dividere per 2 più di una volta e concorda anche col parimente impari, perchè le sue successive divisioni non conducono mai alla unità. I numeri imparimente pari si compongono moltiplicando ordinatamente i termini della serie dei numeri impari, scritti incominciando col 3, coi termini della serie dei numeri parimente pari, scritti incominciando col 4.

Numeri impari:......	3.	5.	7.	9.	11.	13
» parimente pari	4.	8.	16.	32.	64.	128
» imparimente pari	12.	40.	112.	288.	704.	(1)

(1) È stato già precedentemente avvertito che EUCLIDE non distingue il numero *imparimente pari.* — Secondo TEONE DI SMIRNE i numeri *imparimente pari* sono quelli che possono essere divisi due volte successivamente per 2. Questa definizione

Se si moltiplica un numero parimente pari per un numero imparimente pari, il prodotto è un numero imparimente pari: $4 \times 112 = 448$, che è un numero imparimente pari, perchè si lascia successivamente dividere molte volte per due, ma non permette che si giunga all' unità. Analogamente moltiplicando un numero parimente pari per un numero parimente impari ($16 \times 14 = 224$), il prodotto è necessariamente un numero imparimente pari.

Cap. III.

Di un' altra divisione del numero pari.

L'A. in questo terzo capitolo distingue ancora i numeri pari in *superflui, diminuti e perfetti (superflui, mutili vel diminuti, perfecti).*

Superfluo è quel numero nel quale la somma dei suoi divisori, compresa l' unità ed escluso il numero dato, è maggiore del numero stesso. *(Superflui sunt cujus partes proportionales a dimidio*

---

evidentemente è meno generale di quella data dal Noviomago. — Secondo Luca Paccioli numero *imparimente paro* è quello che partecipa del pariter paro e del pariter imparo, cioè si può dividere più volte successivamente per 2, ma non sino all' unità. Questa definizione concorda perfettamente con quella data dal nostro Autore.

usque ad unitatem collectae totum superant) (1). Così, ad esempio 12 è numero *superfluo*, perchè $6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$, che supera il numero 12 proposto.

Diminuto è quel numero nel quale la somma dei suoi divisori, compresa l' unità ed escluso il numero dato, è minore del numero stesso. *(Diminutus cujus partes proportionales compositae minus integro reddunt).* Così, ad esempio, 8 è un numero *diminuto*, perchè $4 + 2 + 1 = 7$, che è minore del numero proposto 8.

Perfetto è quel numero nel quale la somma dei suoi divisori, compresa l' unità ed escluso il numero dato, è uguale al numero stesso. *(Perfectus qui partibus intra se comprehensis et collectis est aequalis).* Così, ad esempio, 28 è un numero *perfetto*, perchè $14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 28$. Riguardo ai numeri perfetti possiamo osservare che nella serie naturale dei numeri, fra i primi dieci soltanto il 6 è numero perfetto; fra i primi cento numeri il 6 ed il 28 solamente sono numeri perfetti; fra i primi mille numeri sono numeri perfetti soltanto il 6, il 28 e il 496; fra i primi diecimila numeri sono numeri perfetti solamente il 6, il 128, il 496 e 8128; ecc. ecc.

---

(1) Grammaticalmente avrebbe dovuto dire *superfluus est*, anche per analogia con le successive definizioni di *diminutus* e *perfectus*.

Per comporre i successivi numeri perfetti l' A. espone la regola seguente « *Inveniuntur autem ex numeris pariter paribus ab unitate naturali ordine descriptis, in qua descriptione priores sequentibus addantur, donec numerum primum et incompositum repperimus, qui per eum multiplicetur qui in additione maximus erat.* », regola che, tradotta convenientemente, suonerebbe così: « Si scrivono i numeri parimente pari nel loro ordine naturale, incominciando dall' unità; in questa serie di termini alla somma dei precedenti si aggiunge successivamente il seguente, fino a che si ottenga un numero primo e questo si moltiplica per il massimo termine della serie prima considerata (1) ».

---

(1) Non è altro che il procedimento significato con elegante brevità da EUCLIDE nella proposizione 39 del libro IX. — OZONAM, matematico francese, che fiorì alla fine del secolo XVII, per determinare dei numeri perfetti espone la seguente regola la quale non è completamente esatta: « Si adopera la progressione « dupla avente per primo termine il numero 2 ed incominciando « dal secondo termine di questa serie si leva l'unità da ciascun « termine ed il resto si moltiplica per il termine precedente ». Scritta la serie 2. 4. 8. 16. 32. $\rightarrow$, si avrà $4 - 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$ numero perfetto; $8 - 1 = 7$, $7 \times 4 = 28$ numero perfetto, ecc. Per la esattezza però della regola precedente manca la essenziale condizione: *quando il resto è numero primo.* Infatti $16 - 1 = 15$ e $15 \times 8 = 120$, che non è numero perfetto, appunto perchè il resto 15 non era numero primo. — I numeri perfetti terminano alternativamente con 6 e con 8. — S. AGOSTINO parla estesamente del numero perfetto nel libro II cap. 39. *De Civitate Dei.* — La regola esposta dal PACCIOLI per trovare i numeri perfetti concorda con quella di Euclide (op. cit., cart. 6).

I numeri parimente pari scritti incominciando con la unità sono: 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.....> Ora $1 + 2 = 3$ numero primo, dunque $3 \times 2 = 6$ sarà un numero perfetto.

$1 + 2 + 4 = 7$ numero primo, dunque $7 \times 4 = 28$ sarà un numero perfetto.

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$, che non è numero primo, dunque $15 \times 8 = 120$ non sarà numero perfetto; $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ numero primo, dunque $31 \times 16 = 496$ sarà numero perfetto, ecc. ecc.

NB. Possiamo frattanto avvertire nella regola esposta un errore d'ordine didattico, poichè in essa si parla già di numero primo, indecomposto, del quale la definizione dal nostro A. è data soltanto nel capitolo successivo.

Cap. IV.

Numero dispari e sua divisione — Classificazione (συστοιχια) Pitagorica.

Il numero impari, secondo Pitagora (premette l'A.), è quel numero che comprende un principio, un mezzo ed un fine *(qui principio, medio et fine continetur)*, come ad esempio il numero $3 = 1 + 1 + 1$, il numero $7 = 3 + 1 + 3$, il numero $17 = 8 + 1 + 8$, ecc.; il numero 2, che divide ogni numero pari, manca di medietà, mentre le due parti di un numero impari vengono congiunte

dalla medietà indivisibile, che è l' unità, *(at numeri imparis partes medio indivisibili coniunguntur)* (1).

I filosofi considerano il numero impari come principio di ogni bene ed il numero pari di ogni male. — Pitagora, avendo diviso tutte quante le cose in buone e cattive (come afferma Diogene Laerzio), compose nove significazioni per le buone ed altrettante per le cattive, rappresentate dalle seguenti antitesi scritte nelle colonne *bonum, malum:*

Bonum		**Malum**
finito	....	infinito
impari	....	pari
unità	....	moltitudine
destro	....	sinistro
luce	....	tenebre
maschio	....	femmina
quiete	....	moto
retto	....	curvo
quadrato	....	rettangolo (2)

---

(1) Si tratta di numero impari in senso assoluto, cioè di numero *imparimente impari*, il quale diviso per un numero impari dà per risultato un numero impari: « *Impariter impar* « numerus est quem impar numerus secundum imparem nu- « merum metitur ». — Questi numeri assolutamente dispari dal Paccioli frequentemente erano chiamati *caffi*.

(2) Il testo veramente nella colonna del Bonum ha *quadratum* e nella colonna del Malum ha *altera parte longius*, cioè quadrato più lungo da una parte che dall'altra (antica definizione del *rettangolo*).

L'autore avverte di avere voluto ricordare quanto precede, perchè gli studiosi possano apprendere la virtù e l' efficacia dei numeri nella essenza delle cose *(quod ob id recenseo ut studiosi numerorum vim intelligant et effectum in rerum essentiis)* (1).

Vi sono tre specie di numeri impari:

*numero primo (*o *indecomposto),* quello che si lascia dividere soltanto dall' unità *(Quem sola metitur unitas),* come 3. 5. 7. 11., ecc.

*numero secondo (*o *composto),* quello che si lascia dividere non soltanto dall'unità, ma anche da qualche altro numero *(Secundus dicitur quod eum non unitas modo sed et alius quoque metitur)* come 9, 15, 21, 25., ecc.

*numeri secondi (*o *composti)* se considerati singolarmente e *numeri primi fra loro,* se paragonati l'uno coll'altro, quei numeri che sono composti, ma insieme raffrontati non ammettono nessun divisor comune,

---

(1) Queste curiose e strane proprietà filosofiche ascritte ai numeri dalla Scuola Pitagorica, delle quali anche oggigiorno difficilmente si comprende la ragione, sono ricordate fra gli antichi da ARISTOTELE (Mat. I, 5, 986 — Phis. III, 4, 203) e da NICOMACO (Intr. Arit. II, 20), fra i moderni dall' HANKEL (op. cit. pag. 109) e dall' HÖFER (op. cit. pag. 129), il quale erra evidentemente ammettendo che secondo i concetti simbolici dei Pitagorici il bene fosse rappresentato dai numeri *pari* ed il male dai numeri *dispari.*

oltre l' unità. *(Per se vero secundi et ad alterum primi, dicuntur duo numeri compositi adinvicem relati, quos nullus communiter metitur praeter unitatem),* come 21 e 55; 21 è composto perchè si lascia dividere per 7 e per 3, 55 è composto perchè si lascia dividere per 11 e per 5, ma 21 e 55 sono primi fra loro perchè non ammettono alcun divisor comune (1).

Il capitolo termina col seguente prospetto destinato a comporre tutti quanti i numeri appartenenti alle tre specie precedentemente significate, prospetto il quale essenzialmente rappresenta il procedimento immaginato per comporre una tavola di numeri primi da *Eratostene,* (2) e per questo chiamato *crivello (κόσκινον)* di *Eratostene:*

---

(1) La distinzione fatta dal nostro A. concorda essenzialmente con quella fatta da Euclide nel libro VII, il quale ricorda e definisce quattro specie di numeri assolutamente impari: *numerus primus, numeri inter se primi, numerus compositus, numeri inter se compositi.*

(2) *Eratostene* (276-195 a. Cr.) di Cirene, bibliotecario ad Alessandria, celebre per il suo vario ed esteso sapere, scrisse molte opere di diverso argomento, riguardanti specialmente l'astronomia, l' aritmetica e la geometria. I frammenti dei suoi scritti furono raccolti da Berardy (*Eratosthenica* — 1822).

3	3			
5	5			
7	7			
	9	9		
11	11			
13	13			
	15	15	15	
17	17			
19	19			
	21	21		21
23	23			
	25		25	
	27	27		
29	29			
31	31			
	33	33	35	35
	35			
37	37			
	39	39		

Nella seconda colonna stanno ordinatamente trascritti i successivi numeri impari incominciando col 3. Ora moltiplicando questi successivi numeri impari per 3 si ottengono i numeri composti della terza colonna 9. 15. 21. 27. ecc. Se si moltiplicano per 5, si ottengono i numeri composti della quarta colonna 15. 25. 35. ecc. — Se si moltiplicano per 7, si ottengono i numeri composti della quinta colonna

21. 35. 49 ecc. e così indefinitamente in analoga maniera.

I numeri della seconda colonna che non troviamo trascritti nelle colonne successive sono i numeri *primi o indecomposti* 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23, ecc. che troviamo trascritti nella prima colonna, nella quale cascarono, direi quasi, dopo avere attraversato una specie di cribro (1).

---

(1) Naturalmente nella composizione di una tavola di numeri primi si considerano solamente i numeri impari, perchè tutti quanti i numeri pari sono composti, fatta eccezione per il numero 2, che si riguarda come numero primo.

LEIBNITZ per il primo affermò che ogni numero primo, dopo il 3, è un multiplo di 6 aumentato e diminuito di 1 e conseguentemente rappresentato in generale dalla formola $6m \pm 1$.

L'HÖFER (op. cit. pag. 238) osserva che codesta affermazione corrisponde a molti casi particolari, ma non è affatto vera in generale. La osservazione di HÖFER è erronea; la proposizione stabilita da LEIBNITZ è vera in generale, senza alcuna restrizione e si può dimostrare molto agevolmente (V. G. FRIZZO — *Trattato di Aritmetica*, ecc. op. cit. pag. 90). La proposizione reciproca non è vera, cioè non tutti i numeri della forma $6m \pm 1$ sono numeri primi ($49 = 6 \times 8 + 1, 35 = 6 \times 6 - 1$), ed è per questo che non si può derivarne una legge generale di composizione dei successivi numeri primi.

OZONAM per formare un numero primo di grado molto elevato insegna il seguente procedimento: « Nella tavola delle « successive potenze del 2 (progressione dupla) si prendono i « numeri che hanno per esponente 2, 4, 8, 16, . . . ecc. », si aggiunge a ciascuno di questi termini un'unità e si ottiene un numero primo:

Cap. V.

Proporzioni dei numeri.

L'A., dopo avere in un lungo esordio proclamata l'importanza delle proporzioni (rapporti), le quali derivano da una certa relazione che intercede fra due numeri proposti, avverte che questi due numeri

---

$2^2 = 4$	$4 + 1 = 5$
$2^4 = 16$	$16 + 1 = 17$
$2^8 = 256$	$256 + 1 = 257$
$2^{16} = 65536$	$65536 + 1 = 65537$

Questo procedimento corrisponde al sospetto di Fermat che il numero $2^m + 1$ fosse primo, quando m sia una potenza del 2, sospetto che non si è poi verificato nella sua generalità, perchè Eulero ha fatto giustamente notare che il numero $2^{32} + 1$ è divisibile per 641. — Non esiste fino ad ora alcuna formola generale la quale rappresenti soltanto numeri primi. Vi sono invece alcune formole particolari, le quali ne danno un certo numero; così, per esempio, nella formola $N = x^2 - x + 1$ dovuta ad Eulero, ponendo successivamente x uguale a 0, 1, 2, 3, 4 . . . . ecc., i primi 40 valori di N sono numeri primi; mentre in maniera analoga la formola $N = x^2 + x + 17$ dà 17 numeri primi e la formola $N = x^2 + x + 29$ ne dà 29.

Intorno ai numeri primi possono essere proposti due importantissimi problemi: α) formare tutti quanti i successivi numeri primi; β) sapere se un qualsivoglia numero proposto sia o non sia numero primo. Ma appunto perchè non è stata fino ad ora scoperta una legge generale di formazione dei successivi numeri primi e della loro eventuale periodicità, per la soluzione del primo problema, quando non si voglia ricorrere al cribro di Eratostene, dobbiamo limitarci alle norme particolari e

l' uno coll' altro confrontati, sono fra loro necessariamente eguali o disuguali, e se disuguali o per eccesso o per difetto, soggiungendo che, tanto nel caso dell' eccesso quanto nel caso del difetto, si hanno cinque specie diverse di proporzioni. Nel caso di ineguaglianza per eccesso, la prima si chiama *molteplice,* la seconda *superparticolare,* la terza *superdividente,* la quarta *molteplice superparticolare,* la quinta *molteplice superdividente;* nel caso di ineguaglianza per difetto, valgono rispettivamente le denominazioni precedenti, a ciascuna delle quali sia premessa la preposizione *sub,* come *submolteplice, subsuperparticolare, ecc.*

Ciò premesso, l' A., seguendo Aristotele, espone ordinatamente le definizioni di ciascuna delle cinque specie delle predette proporzioni e rispettivamente le illustra con esempi opportuni: Si chiama proporzione *molteplice* quella nella quale il numero maggiore contiene esattamente un certo numero

---

incomplete precedentemente significate, e per la soluzione del secondo problema possiamo adoperare qualche criterio negativo, come ad esempio: se il numero proposto termina con 5, oppure se terminando, con 1, 3, 7, 9, la somma dei numeri rappresentati dalle sue cifre è un multiplo di 3, quel numero non è primo. — Non vi è che un solo mezzo positivo diretto (quando non si abbia a nostra disposizione una tavola molto estesa di numeri primi), cioè: adoperare volta per volta successivamente tutti i numeri dispari come divisori del numero proposto, sino ad ottenere per risultato della divisione un numero rappresentante la radice quadrata approssimata del numero proposto.

di volte il numero minore. *(Multiplex autem proportio ea dicitur quam submultiplex metitur)*, come 12 a 4. — Questa proporzione in particolare si dice *doppia, triplice, quadrupla, quintupla, ecc.* secondo che il primo numero contenga il secondo 2 volte, 3 volte, 4 volte, 5 volte, ecc. — Dato un numero per comporre rispetto a quel numero delle proporzioni molteplici crescenti all' infinito, basta moltiplicare quel numero per i successivi termini della serie naturale dei numeri incominciata col numero 2.

Si chiama proporzione *superparticolare* quella nella quale il numero maggiore contiene insieme col numero minore una sua parte aliquota. *(Superparticularis est, qua major minorem et ejus insuper aliquam portionem continet)* — Se questa parte aliquota è la metà del numero minore allora la proporzione secondo i Greci si chiama ἡμιόλιος, secondo Cicerone *sescupla* e secondo i più moderni scrittori *sesquialtera*, come la proporzione del 6 al 4, perchè il 6 contiene il 4 e la metà del 4. — Se poi il numero maggiore contiene il numero minore più la terza parte di questo, oppure la quarta parte, oppure la quinta parte, ecc. in greco si chiama ἐπίτριτος, ἐπιτέταρτος, ἐπίπεμπτος, ecc. ed in latino: *sesquitertia, sesquiquarta, sesquiquinta*, ecc. — Così, ad esempio, scrivendo i successivi numeri della serie naturale incominciata col numero 2, cioè:

2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. → ; è facile accorgersi che la proporzione del 3 al 2 è sesquialtera, del 4 al 3 è sesquiterza, del 5 al 4 è sesquiquarta, e così di seguito indefinitamente.

Si chiama proporzione *superdividente* quella nella quale il numero maggiore contiene insieme col numero minore *alcune* (più di una) sue parti aliquote. *(Superpartiens proportio qua maior minorem comprehendit et insuper aliquot ejus partes).* — Dunque la differenza fra la proporzione superparticolare e la proporzione superdividente è questa: nella superparticolare il numero maggiore contiene insieme col minore *una sola* sua parte aliquota, nella superdividente invece ne contiene *più di una* di queste parti, le quali significate dall'autore con la parola *partes* altro non sono, in questo caso, che le unità (*partes maximae denominationis)* che concorrono alla formazione del numero. — Esempi: La proporzione del numero 8 al 6 è superparticolare, perchè l'8 contiene il 6 ed *una* terza parte del 6, la proporzione invece del 10 al 7 è superdividente, perchè il 10 contiene il 7 e *tre* settime parti del 7. — La proporzione superdividente poi piglia le seguenti speciali denominazioni: *superbidividente, supertridividente, superquadridividente,* ecc. secondo che il numero maggiore contiene insieme col numero minore rispettivamente due parti aliquote, tre parti aliquote, quattro parti aliquote, ecc.

del numero minore. Così, ad esempio, scrivendo la serie dei numeri impari incominciata col 5, cioè: 5. 7. 9. 11. 13. 15, ecc. e corrispondentemente la serie dei numeri naturali incominciata col 3, cioè: 3. 4. 5. 6. 7. 8, ecc., è facile accorgersi che la proporzione del 5 al 3 è superbidividente, del 7 al 4 supertridividente, del 9 al 5 superquadridividente, e così di seguito indefinitamente.

Si chiama proporzione *molteplice superparticolare* quella nella quale il numero maggiore comprende il numero minore più di una volta ed insieme comprende pure più di una volta una parte aliquota del numero minore, per la qual cosa questa specie partecipa della prima e della seconda. *(Multiplex superparticularis ex prima et secunda specie proportionem habet).*

Così la proporzione del 10 al 4 è molteplice superparticolare, perchè il numero 10 contiene due volte il 4 e contiene inoltre 2 quarte parti (unità) del 4. Quando il numero maggiore contiene il minore due volte ed insieme la sua metà, come nell' esempio precedente, allora si chiama *doppia sesquialtera;* se lo contiene tre volte ed insieme la sua terza parte, allora si chiama *tripla sesquiterza;* se lo contiene quattro volte ed insieme la sua quarta parte, allora si chiama *quadrupla sesquiquarta,* ecc. e così di seguito indefinitamente in analoga maniera.

L'ultima specie deriva dalla prima e dalla terza e si chiama *molteplice superdividente.* In questa il numero maggiore contiene il numero minore *più* di una volta ed insieme *più* parti del numero minore. *(Postrema species ex prima et tertia coalescit, quae dicitur multiplex superpartiens, per quam major minorem saepius quam semel comprehendit et plures ejusdem partes).* Così la proporzione del numero 8 al numero 3 si chiama particolare *duplasuperbidividente,* perchè il numero 8 contiene 2 volte il numero 3 ed insieme contiene 2 terze parti del numero 3. Analogamente la proporzione del 17 al 15 sarebbe tripla superbidividente, perchè il numero maggiore 17 contiene il numero minore 5 *tre volte* ed insieme comprende *due volte* la quinta parte del numero 5, e così di seguito in analoga maniera.

Il capitolo, di cui si tratta, dopo svariati esempî termina colle seguenti parole: *Eadem ratione ad infinita scandendum, cujus rationem non nisi exemplis tradidimus, ut studiosi diligentiam hic excitaremus* (Nella medesima maniera si può procedere indefinitamente, ed io ne ho esposto il sistema soltanto per esempî, per eccitare la diligenza degli studiosi).

Osservazione. — Il lettore ormai si sarà agevolmente accorto che l' autore in questo capitolo parlando di proporzioni intende parlare di rapporti,

ed in secondo luogo che tutte queste divisioni e sottodivisioni scolastiche concorrono piuttosto a sollevare nella mente dello studioso una deplorevole confusione che a imprimervi idee chiare e determinate; esse rivelano una conoscenza ancora imperfetta intorno alla natura dei numeri che, secondo i precetti pitagorici, osservando svariati casi particolari si considerano praticamente nella loro plastica struttura e non teoricamente nelle loro essenziali caratteristiche proprietà, le quali rappresentano le gloriose conquiste di studî compiuti sul finire del secolo XVIII e nel principio del secolo XIX.

Cap. VI.

Numeri figurati rappresentanti speciali forme di grandezze (geometriche) (1).

In questo capitolo l'A. parla dei *numeri figurati*, premettendo la seguente osservazione: Sebbene il numero non sia una quantità continua, tuttavia si può rappresentare per mezzo di segni, i quali congiunti con linee o rappresentano grandezze (geometriche) o parti di grandezze. *(Numerus etsi continua quantitas non sit, describitur tamen partium intervallis, qui si lineis claudantur, aut magnitudines sunt aut magnitudinis partes).*

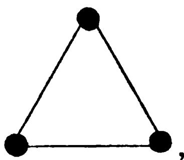
---

(1) *De numeris descriptis in figuras et species magnitudinis.*

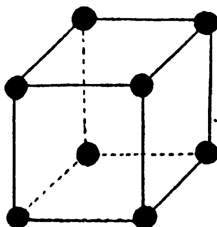
— Ciò premesso l'A. dimostra successivamente con esempi come dalla diversa disposizione dei punti, dei segni, il numero graficamente rappresentato possa assumere forma lineare:



oppure forma superficiale:



oppure forma solida:



e tratta specialmente del numero *lineare,* del numero *triangolare,* del numero *quadrato* e del numero *rettangolare,* chiudendo il capitolo con la esposizione della regola pratica per l'estrazione di radice quadrata.

Il numero *lineare* è quello che incominciando dal 2 procede indefinitamente per l'addizione dell'unità, sempre col medesimo costante intervallo,

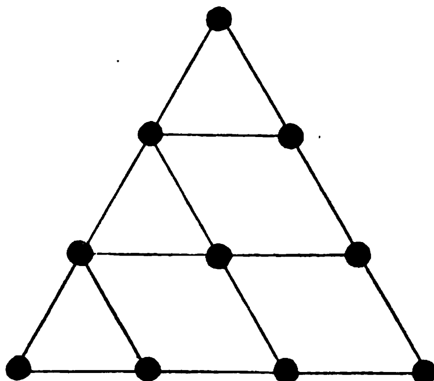
(*Linearis est qui a binario incipiens unitatis additionem in unum idemque intervallum perpetuo procedit*). — Esempio: 2. 3. 4. 5.... →



Il primo dei numeri piani è il numero *triangolare,* dal quale deriva ogni altro numero piano.

Il numero *triangolare* è quello che viene descritto dalle unità disposte in maniera che i lati (del triangolo risultante) rappresentino numeri eguali *(qui ab unitate descriptus latera aequalium numerorum reddit).*

I numeri 1. 3. 6. 10. 15. 21. ecc. sono triangolari, perchè le loro unità possono appunto essere successivamente disposte in maniera che i lati di



ogni successivo triangolo risultante e graficamente significato dalla precedente figura rappresentino rispettivamente numeri eguali.

Queste forme (di numeri triangolari) si ottengono scrivendo la serie naturale dei numeri incominciando dall'unità ed aggiungendo poscia ciascun termine della serie alla somma di tutti i precedenti *(Oriuntur hae formae ab unitate numeris naturali serie deductis per cujusque sequentis ad priores additionem)*.

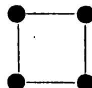
Scrivo: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

ed avrò

	1 =	 1
	1 + 2 =	 3
	3 + 3 =	 6
	6 + 4 =	 10
	10 + 5 =	 15
	15 + 6 =	. . . . . 21, ecc.

I risultati delle singole successive addizioni rappresentano i successivi numeri triangolari.

Il numero *quadrato* è quello che viene descritto dalle unità disposte in maniera che i lati (del quadrilatero risultante) rappresentino numeri eguali *(Quadratus dicitur cum descriptus per unitates quatuor efficit latera aequalia)*. Esempio:



Per comporre tutti quanti i numeri quadrati, basta scrivere nel loro ordine naturale, incominciando dall'unità, la serie dei numeri impari ed aggiungere un termine qualunque alla somma di

tutti i precedenti *(Imparibus ab unitate naturali ordine descriptis, sequens antegressis additus efficit quadratum).*

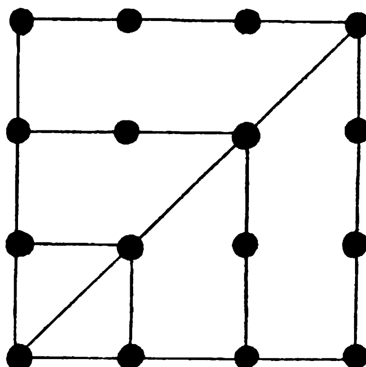
Scrivo: 1. 3. 5. 7. 9. 11.

ed avrò: $1 + 3 = \ldots\ldots 4$

$4 + 5 = \ldots\ldots 9$

$9 + 7 = \ldots\ldots 16$

$16 + 9 = \ldots\ldots 25$, ecc.



I risultati delle singole successive addizioni rappresentano i successivi numeri quadrati.

L'A. avverte che vi sono anche i numeri *rettangolari,* che egli chiama *quadrati altera parte longiores,* i quali si formano *ex ductu numeri alicujus per alterum unitate majorem* (moltiplicando un numero qualsivoglia per un altro che lo supera di un'unità), come tre volte quattro, quattro volte cinque, cinque volte sei, ecc. I numeri rettan-

golari si ottengono anche scrivendo nel suo ordine naturale la serie dei numeri pari, incominciata col numero 2, ed aggiungendo un termine qualsivoglia della serie alla somma di tutti i termini precedenti *(Pares numeri paribus praecedentibus omnibus ad binarium conjuncti efficiunt altera parte longiores)*.

Scritta la serie: 2. 4. 6. 8. 10. ,

avremo:	$2 + 4 = 6$	. . .	$= 2$ volte 3
	$6 + 6 = 12$	. . .	$= 3$ volte 4
	$12 + 8 = 20$	. . .	$= 4$ volte 5.
	$20 + 10 = 30$	. . .	$= 5$ volte 6, ecc.

dove tutti i successivi numeri risultanti sono rettangolari.

A questo punto l'autore ricorda che il numero rettangolare si può anche ottenere moltiplicando un numero per un altro che supera il primo di più unità, p. e. 3 volte 14, ma qualcuno di questi numeri può anche essere quadrato come 2 volte 8 eguale a 16, che è pure eguale a 4 volte 4.

Il numero quadrato moltiplicato per un numero quadrato genera un numero quadrato, 4 volte 9 è uguale a 36, numero quadrato.

Il numero quadrato raddoppiato (cioè moltiplicato per 2) genera sempre un numero rettangolare, 2 volte 16 è uguale a 32, numero rettangolare (1).

---

(1) La formazione dei numeri figurati si attribuisce alla scuola pitagorica. Su questo argomento i più antichi lavori sono

Data la seguente definizione di radice (1): Qualsivoglia lato del quadrato, ossia il numero che moltiplicato per se stesso genera il quadrato (*Radix dicitur quadrati quodlibet latus, seu numerus qui per se ductus quadratum constituebat*), l'A. osserva prima di tutto che se il quadrato è fra 1 e 100, la radice sarà fra 1 e 10; se il quadrato è sopra 100 la radice sarà sopra 10; se il quadrato è sopra 10000 la radice sarà sopra 100, ecc. e successivamente espone per trovare la radice una regola la quale, un po' diversa nella forma, corrisponde essenzialmente all'ordinario procedimento oggigiorno universalmente adoperato, regola che qui trascrivo

---

di *Nicomaco* e di *Diofanto* (*), intorno ai quali ha scritto il NESSELMANN *(Geschichte der Algebra)* — Il KÄSTNER *(Geschichte der Mathem.* III pag. 120) ricorda che della ricerca di formole generali per la composizione dei numeri figurati si sono occupati nel secolo XVI e XVII *Maurolico*, *Benz*, *Faulhaber* ed altri. — Trattarono fra i molti sistematicamente dei numeri figurati TEONE di Smirne, DIOFANTO, PACCIOLI, BALTZER ecc. e storicamente fra gli altri l'HÖFER (op. cit. pag. 98 e seg.) il SUTER (op. cit.), il MARIE (op. cit., tom. I, pag. 235 e seg.) l'HANKEL (op. cit. pag. 104), ecc.

(1) L'A. colla semplice parola *radice* intende significare la *radice quadrata*.

(*) Nicomaco ci ha lasciato un'*Introduzione allo studio dell'Aritmetica*, che fu pubblicata da Wechel (Parigi 1534) e Diofanto fra i suoi preziosi lavori ha il *Libro dei numeri poligonali*, nel quale cerca di illustrare quello che Teone di Smirne lasciò nel vago e nell'indeterminato e di dimostrare quello che questi si limitò ad enunciare, aggiungendo in argomento all'opera dei suoi predecessori un certo numero di eleganti questioni, che il Diofanto si propone e risolve (v. *Marie* op. cit. pag. 42, tom. 2).

tradotta pressochè letteralmente ed applicata ad un caso particolare, cioè all'estrazione di radice dal numero 5329:

α) Scritto il numero che si riguarda come quadrato, procedendo dalla destra (verso sinistra) si segna con un apice la prima cifra e similmente la terza; la radice avrà tante cifre (*figuras*) quanti sono gli scompartimenti (*loca*) segnati, cioè gli apici adoperati. Nel nostro caso avrà 2 cifre.

β) Si trova un numero il quale moltiplicato per se stesso produca o tutto intero esattamente il numero contenuto nell'ultimo scompartimento (a sinistra) o il più gran numero che da questo possa essere levato. Nel nostro caso questo numero è 7, che moltiplicato per se stesso dà 49, il quale sottrato da 53 dà per residuo 4, che si sostituisce al 53, per la qual cosa, il numero proposto diventa 429. Il numero 7 si scrive fra 2 rette parallele tracciate sotto il numero 5329, $\frac{5329}{\underline{7}}$ ed il numero 14 doppio di 7 si scrive fra due rette parallele tracciate sotto il numero 429, $\frac{429}{\underline{14}}$, in maniera che l'ultima cifra 4 si trovi sotto la penultima cifra 2.

γ) Si trova un numero che moltiplicato per 14 (doppio del 7) produca il numero direttamente sovrastante (che nel nostro caso è 42) ed inoltre moltiplicato per se stesso produca il residuo ottenuto

levando da tutto il numero il prodotto della precedente moltiplicazione. Nel nostro caso il numero cercato è 3 perchè 3 volte 14 è uguale a 42 (decine) e levando dal numero 429 le 42 decine restano 9 unità e 3 volte 3 è proprio uguale a 9 unità, per la qual cosa la proposta radice sarà rappresentata dal numero 73.

Cap. VII.

Numero pentagonale. Altre specie di numeri figurati denominate dal numero degli angoli (1).

In questo capitolo l'A. espone successivamente le definizioni dei numeri pentagonali, esagonali, ettagonali, ottagonali, ecc. significando rispettivamente le regole per la loro composizione.

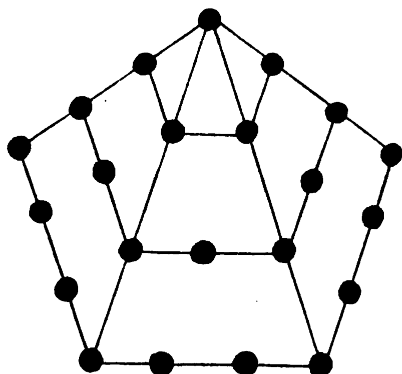
Chiamasi numero *pentagonale* quello che viene descritto con unità disposte in maniera da rappresentare una figura di cinque lati uguali. (*Pentagonus est numerus qui per unitates descriptus schema efficit quinque laterum aequalium).*

Analogamente sarebbero numeri *esagonali, ettagonali, ottagonali,* ecc. quelli descritti con unità disposte in maniera da rappresentare rispettivamente una figura di sei, sette, otto, ecc. lati eguali.

(1) *De Pentagono et reliquis generibus figurarum ex angulis denominatis.*

I numeri *pentagonali* si ottengono congiungendo ordinatamente i numeri triangolari coi numeri quadrati, avendo incominciata la serie dei numeri triangolari con 1 e quella dei numeri quadrati con 4. Avremo:

Numeri triangolari:	1.	3.	6.	10.	15.
Numeri quadrati:	4.	9.	16.	25.	36.
Numeri pentagonali:	5.	12.	22.	35.	51.



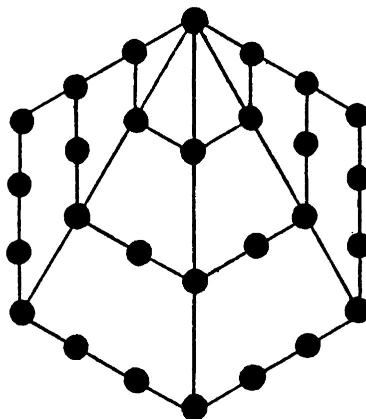
I numeri pentagonali si possono ottenere anche col procedimento seguente: Si scrive prima la serie naturale dei numeri incominciando dall'unità e poi ommessi i due termini successivi al primo si aggiunge l'unità al termine seguente e si avrà così il primo numero pentagonale; il risultato ottenuto si aggiunge al termine che segue i due termini successivi e si avrà così il secondo numero pentagonale, e così di seguito analogamente.

Scritta la serie 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. Si avrà: $1 + 4 = 5$, $5 + 7 = 12$, $12 + 10 = 22$, $22 + 13 = 35$, ecc. risultati rappresentanti rispettivamente i successivi numeri pentagonali.

Adoperando la medesima regola, ommettendo però ogni volta tre termini successivi, si avrebbero i numeri esagonali (*Exagoni fiunt eodem modo intermissis tribus, ut in pentagoni constitutione*).

Scritta la serie 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17, i successivi numeri esagonali saranno:

$1 + 5 =$ 6
$6 + 9 =$ 15
$15 + 13 =$ 28
$28 + 17 =$ . . . . . 45, ecc.



Ed ommettendo invece ogni volta quattro termini successivi, cinque termini successivi, sei termini

successivi, ecc. si avrebbero rispettivamente i numeri ettagonali, ottagonali, ennagonali, ecc. *(heptagoni intermissis quatuor, octagoni quinque, ennagoni sex, eodem modo ut in pentagonis omissis duobus, fiunt).*

Cap. VIII.

Dei numeri rappresentanti figure solide e primieramente del numero piramidale (1).

In questo capitolo l'A. premette la definizione di numero figurato solido e successivamente avverte che fra tutti i numeri figurati solidi il primo ed il più semplice è il numero *piramidale,* perchè come nel piano il triangolo è la figura primordiale generatrice di ogni altra figura piana, così la piramide nello spazio è la generatrice di ogni altra figura solida. *(Horum omnium primae sunt pyramides, nam ut in planis sunt trianguli figurarum initia, ita in solidis pyramides).*

In seguito l'A. dà la definizione di piramide e ricorda che le specie diverse di piramide derivano dalla natura diversa della base (piramide triangolare, quadrangolare, pentagonale, ecc.). — Tutto ciò premesso, egli termina il capitolo esponendo le regole per la composizione dei vari numeri piramidali.

---

(1) *De numeris per solida descriptis ac primum de pyramide.*

I numeri piramidali triangolari si formano scrivendo la serie dei numeri triangolari incominciata con la unità ed aggiungendo ciascun termine della serie alla somma di tutti i precedenti; i numeri piramidali quadrangolari si formano nella medesima maniera, scrivendo invece la serie dei numeri quadrati; i numeri piramidali pentagonali si formano pure nella medesima maniera, scrivendo invece la serie dei numeri pentagonali, ecc. ecc.

Volendo comporre i successivi numeri piramidali triangolari, scriverò la serie: 1, 3, 6, 10, 15 → (numeri triangolari) ed avrò $1 + 3 = 4$, $4 + 6 = 10$, $10 + 10 = 20$, $20 + 15 = 35$, ecc., volendo comporre i successivi numeri piramidali quadrangolari, scriverò: 1, 4, 9, 16, 25, 36, → (numeri quadrati) ed avrò: $1 + 4 = 5$, $5 + 9 = 16$, $16 + 16 = 32$, $32 + 25, = 57$, $57 + 36 = 93$, ecc.

Da tutto quanto precede risulta che i numeri piramidali derivano per successive addizioni dai numeri piani, donde traggono pure la corrispondente denominazione; infatti adoperando i numeri triangolari si formano i numeri piramidali triangolari; adoperando i numeri quadrati si formano i numeri piramidali quadrati, e così di seguito. *(Hinc nunc constat pyramidum originem esse ex numeris planis, unde et denominantur, nam quadratus numerus quadratam pyramidem erigit).*

Cap. IX.

Il cubo, lo sferico, il docide il plintide, il parallelepipedo (1).

In questo capitolo prima di tutto l'A. dà la definizione di *numero cubo*, espone in qual maniera si possano comporre i numeri cubi ed in forma molto abbreviata ricorda la regola per estrarre la radice da un numero cubo. — Successivamente, dopo avere detto che cosa sia il *numero sferico*, definisce le altre specie diverse di numeri figurati solidi (sfenisco, parellelepipedo, docide, plintide) (2). — Traducendo letteralmente si ha: È *numero cubo* quello che dal quadrato descritto si solleva ad un'altezza eguale (al lato della base), avendo sei facce, una sopra la quale insiste, un' altra superiore opposta e quattro all'ingiro, come hanno i dadi. *(Cubus est numerus, qui ex quadrata descriptione in aequalem altitudinem erigitur, habens latera sex, unum qua consistit, alterum supremum et quatuor in ambitu, ut tesserae).* — I successivi numeri cubi si possono comporre nella seguente maniera:

(1) *De cubo, sphaerico, docide, plinthide et parallelepipedo.*

(2) Nella denominazione del capitolo lo *sfenisco* non è ricordato.

Si scrive la serie naturale dei numeri, incominciando con l'unità:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 . . . . →

Si scrivono nel loro ordine naturale, pure incominciando dall'unità, i successivi numeri quadrati:

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. . . . . →

Si moltiplicano ordinatamente i termini della prima serie per i termini della seconda serie ed avremo i numeri cubi:

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. . . . . →

I successivi numeri cubi si possono anche determinare col procedimento seguente: Si scrivono nel loro ordine naturale i numeri impari incominciando col tre:

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23.

La somma dei *due* primi termini $3 + 5$ rappresenterà il secondo numero cubo $= 8$;

La somma dei *tre* successivi termini $7 + 9 + 11$ rappresenterà il terzo numero cubo $= 27$;

La somma dei *quattro* successivi termini $13 + 15 + 17 + 19$ rappresenterà il quarto numero cubo $= 64$, e così di seguito indefinitamente.

L'A., ciò premesso, osserva che aggiungendo un numero cubo a se stesso non si ottiene un numero cubo, come il numero quadrato aggiunto a se stesso non forma un numero quadrato. Per questo il problema della duplicazione del cubo non si può risolvere col rapporto dei numeri, ma soltanto con quello

delle linee. (*Ob id quo modo cubum geminare oportet, seu duplicare, numerorum ratio non docet, sed linearum*). Questa soluzione geometrica, secondo l'Autore, dicesi sia stata trovata da Platone in quel tempo nel quale i Delii, travagliati da gravissima pestilenza, ricorsero implorando salvezza ad Apollo, che loro impose di duplicare l'altare lungo, largo ed alto 10 piedi (1).

L'Autore, considerando i numeri cubi, ricorda finalmente che il cubo di un numero qualsivoglia si ottiene moltiplicandolo due volte per se stesso, così il cubo del numero 7 è *sette* volte 7 preso *sette* volte = 343. Il numero proposto si dice radice del cubo risultante e quando vogliasi trovare la radice di un cubo maggiore di 1000, bisogna operare come si è fatto per trovare la radice del quadrato, se nonchè in questo caso si deve collocare l'apice sulla quarta cifra, mentre prima sulla terza, e moltiplicare ora il numero trovato due volte per se stesso,

(1) È uno dei tre famosi problemi geometrici dell'antichità: la *trisezione dell'angolo*; la *quadratura del cerchio*; la *duplicazione* del cubo. Intorno a queste importantissime ed eleganti questioni, oltre al SUTER, all'HANKEL e all'HÖFER (opere citate), si può consultare: MONTUCLA (*Histoire des recherches de la quadrature du cercle*, ecc. Paris, 1831) e F. ENRIQUES (*Questioni riguardanti la geometria elementare* — Bologna, 1900), nei capitoli tredicesimo (pag. 415 e seguente) e quattordicesimo (pag. 471 e seg.), dovuti rispettivamente agli egregi Professori *dott. Alberto Conti* e *dott. Benedetto Calò*.

mentre prima una volta; bisogna ancora triplicare il quadrato del numero trovato, mentre prima bastava raddoppiare questo numero. *(Age ut in radice quadrati invenienda dictum est, nisi quod hic quartus numerus signatur apice, ut in quadrato tertius, et hic numerum inventum per se ducere oportet bis, ut istic semel; item ibi inventum geminare oportet, hic inventi quadratum triplicare)*.

*
* *

Si chiama *sferico* quel numero che moltiplicato per se stesso ritorna sempre a terminare con la sua medesima ultima figura — *(in se semper revertitur)*, — come, nella rotazione intorno al centro, avviene del circolo e della sfera, donde la ragione del nome (1). — Evidentemente sono sferici tutti i numeri che terminano con zero, con uno, con cinque o con sei. Si avrà così 6 volte 6 = 36; 6 volte 6 preso 6 volte

---

(1) E per questa ragione questi numeri furono anche chiamati dagli antichi *circolari*. Io non intendo però perchè il nostro autore comprenda fra i numeri sferici o circolari quelli soltanto che terminano con 5 e con 6 e non quelli che terminano con 0 o con 1 (*Hi nascuntur tantum a duobus numeris, quinario et senario, sed in infinitum multiplicatis)* — I numeri che terminano con 4 o con 9 sarebbero *semisferici* o *semicircolari*, perchè moltiplicati rispettivamente per se stessi all'infinito presentano alternativamente la medesima figura 6, 4, 6, 4, ecc. il quattro, 1, 9, 1, 9, ecc. il nove.

= 216; 6 volte 6 preso 6 volte 6 = 1296; questi successivi numeri risultanti, fatta naturalmente eccezione per la base, hanno pure la proprietà di essere alternativamente o quadrati o cubi.

*
* *

Si chiama *sfenisco* quel numero solido figurato che risulta dal prodotto di tre numeri disuguali (in opposizione al cubo che risulta dal prodotto di tre numeri uguali), come ad esempio: 4 volte 5 preso 6 volte = 120; il 4 esprimente la lunghezza, il 5 la larghezza e il 6 l'altezza (1).

*
* *

Si chiama *parallelepipedo* quel numero solido figurato che ha due dimensioni fra loro eguali ed una disuguale, come ad esempio: 2 volte 5 preso 2 volte, oppure 3 volte 4 preso 4 volte, ecc. — Secondo l'A. il parallelepipedo non è che un caso particolare dello sfenisco.

Analogamente il *docide* e il *plintide* sono alla lor volta due specie particolari di parallelepipedo, l'una opposta all'altra. Infatti il *docide* è quel numero figurato solido nel quale la lunghezza è uguale alla larghezza, ma l'altezza è maggiore, come ad esempio: 5 volte 5 preso 9 volte, essendo 5 la lunghezza, 5 la larghezza e 9 l'altezza; il *plintide*

(1) Questa definizione corrisponde essenzialmente alla definizione moderna generale di *parallelepipedo rettangolare.*

invece è quel numero figurato solido nel quale la lunghezza è uguale alla larghezza, ma l' altezza è minore, come ad esempio: 5 volte 5 preso 3 volte, essendo 5 la lunghezza, 5 la larghezza e 3 l'altezza.

Cap. X.

Proprietà dei numeri nella serie da uno a dieci (1).

In questo capitolo l'A. premette che fino ad ora egli ha rapidamente considerato le virtù e le proprietà dei numeri nelle loro forme generali *(per generales affectiones)*, raccogliendo in questo compendio, dalla osservazione di svariati autori, quanto reputava necessario agli studiosi per acquistare una solida erudizione. — « Mi sono prudentemente astenuto, egli soggiunge, dal triplice raffronto delle proporzioni aritmetica, geometrica ed armonica, per due ragioni: perchè questa parte dell'aritmetica non potrebbe essere esposta così brevemente, come avevo stabilito, e perchè, apprese le nozioni precedenti, gli alunni avrebbero trovato agevole via per studî maggiori » *(quia ea pars tam breviter quam institui tradi non posset et quod, his perceptis, satis paratum aditum ad maiora studia discentes sint abituri)*.

Ciò premesso, il nostro A. dichiara che in questo ultimo capitolo esporrà le proprietà singolari di quei

(1) *De proprietate numerorum, qui intra denarium sunt.*

numeri, che nel libro precedente furono chiamati *digiti,* perchè non superano il dieci — Tutti quanti i numeri, come risulta anche dalla loro rispettiva denominazione, derivano dai primi dieci numeri, nei quali si trovano appunto tutte le diverse specie prima considerate: i pari e gli impari; i superflui, i perfetti e i diminuti; i lineari, i triangolari, i quadrati, i rettangolari ed anche i piramidali, i cubi, ecc., per la qual cosa Pitagora volle riferire le proprietà di un numero qualunque a quelle del *dieci* o dei numeri che non superano il *dieci,* cioè sono parti del *dieci (hinc Pythagoras voluit ad denarium eosque qui intra sunt, hoc est partes decadis, cuncta convocari).*

A. — (Dell'*unità* prima parte del numero dieci — *De monade prima denarij parte*) — L'unità è il principio di tutti quanti i numeri; essa rappresenta la eterna divinità, è ingenerabile, indivisibile, ecc. — Questa Pitagora chiamò mente, immagine di Dio, simbolo della virtù, ma principalmente fonte di prudenza, di concordia, di amore, di bellezza e di verità — (*Hanc Pythagoras mentem vocavit ac Dei similitudinem, symbolum virtutis, sed praecipue prudentiae authorem concordiae, amoris, pulcretudinis et veritatis).*

B. — (Del numero *due* — *De binario*) — È il primo numero che nasce dall'unità (ripetuta) e con-

seguentemente è il primo *vero numero;* è il primo numero lineare; il primo numero che esplica la fusione della natura divina coll' umana, formata da parti corruttibili e incorruttibili; il primo numero pari che genera tutti gli altri numeri pari; il numero *due* rappresenta il moto e la moltitudine (v. Cap. IV) (1) ed è il simbolo del giudizio, primo passo verso la verità, perchè due sono le parti (i termini) fondamentali del giudizio (*symbolum opinionis, primus a veritate gradus, opinionis enim ratio est anceps*).

C. – (Del numero *tre* – *De ternario*) – La triade è il primo dei numeri impari; essa è il gnomone che collocato intorno al numero *uno* genera il primo quadrato $1 + 3 = 4$, $\bullet + \begin{matrix}\bullet & \bullet \\ & \bullet\end{matrix} = \begin{matrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{matrix}$ — Il tre è un numero celebratissimo non solo presso i filosofi, ma anche presso i poeti, perchè contenendo un principio, un mezzo e un fine, secondo la disciplina

---

(1) A mio avviso, rappresenta il *moto*, perchè come primo numero lineare svolge nella mente il concetto di movimento dalla prima alla seconda unità (primo numero lineare); rappresenta poi la moltitudine *(multitudo)*, cioè la *pluralità*, perchè sotto questo riguardo è diametralmente opposto all' unità. La monade significa *uno*, il due significa *più*.

Si poteva anche osservare che il due rispetto ai numeri pari è ciò che è l' unità rispetto a tutti i numeri, e che è il solo numero il quale, aggiunto a se stesso o moltiplicato per se stesso, dà una somma uguale al suo prodotto.

dei Pitagorici, rappresenta tutte le cose, e conformemente alle recondite leggi di natura è usato nei sacrificî divini — (*quod primum omnia significet itemque principio medio et fine contineatur, iuxta Pytagoraeorum disciplinam et iuxta occultam naturae legem sacrificijs deorum adhibitus*).

Questo numero, scrive l' A., noi veneriamo, questo adoriamo, con questo noi affermiamo quella qualunque cosa che intendiamo sia sacra e solenne, con questo numero alimentiamo, eccitiamo e temperiamo i sentimenti e con questo ancora noi intendiamo significare la beatitudine, cioè, la somma felicità e la somma potenza, quando diciamo: tre volte beato, tre volte massimo, ecc. *(Hunc veneramur, hunc adoramus, hoc quicquid solemne et ratum esse volumus confirmamus, hoc affectum edimus, concitamus et placamus, hoc etiam beatitudinem, id est, summam felicitatem summamque potentiam significamus, dum ter beatos et ter maximos dicamus).*

Ogni corpo ha *tre* dimensioni e la sua forma è determinata dal numero *tre*, che corrisponde al triangolo, origine ed elemento di ogni figura.

Questo numero infine colle sue parti (1, 2, 3) compone il numero sei, che come precedentemente è stato detto è il primo numero (perfetto) che in se stesso esattamente comprende i proprî divisori.

(*Postremo reddit senarium suis partibus hic numerus, qui primus intra se continetur, ut superius diximus*).

D. — (Del numero *quattro* — *De quaternario*) — Al numero quattro sono consacrate specialmente le parti dell'universo, il mondo stesso, l'anno, l'uomo, e l'anima (*quaternario consecratae praecipue partes universi sunt, mundus ipse, annus, homo et anima*), ciò che risulta anche dal giuramento adoperato dai Pitagorici, il quale suonava così: *μὰ τὸν ἁμετέρα ψυχα παράδοντα τέτρακτυν*, cioè *per quello che all'anima nostra concesse il quaternario* (*il numero quattro*). Questo numero rappresenta il primo quadrato e colle sue parti (1, 2, 3, 4) determina il numero supremo dieci (cioè l'ultimo della serie). — Fra le figure conterminate da linee rette il quaternario rappresenta quella di area massima, cioè l'area del quadrato. (*Ac in figuris quae rectis lineis continentur, capacissam aream quaternarius efficit*).

Il numero quattro esprime anche la prima piramide, che i fanciulli nel gioco per imitazione compongono sovrapponendo a tre noci la quarta in forma di piccola torre (*Primam quoque exprimit pyramidem solidam, quam pueri nucibus lusitantes tribus quarta superimposita, in turriculae figuram imitantur*).

Questo numero gode fra i numeri pari di quella perfezione di cui gode fra i numeri dispari il tre,

per la qual cosa il poeta, volendo esprimere il sommo grado della felicità, disse *tre e quattro volte beati.* (*Habet eam perfectionem in paribus, quam in imparibus ternarius, poeta itaque supremum felicitatis gradum expressurus, terque quaterque beatos dixit*).

E. — (Del numero *cinque* — *De quinario*) — È il primo numero che risulta dalla somma del due e del tre, dei quali il primo rappresenta la femmina ed il secondo il maschio (v. Cap. IV). Moltiplicando questo numero continuamente per se stesso si ottiene un numero che termina sempre con 5 (*semper in se revertitur*), per la qual cosa, come è stato detto precedentemente si chiama *sferico* o *circolare ;* è il primo numero pentagonale e dai Pitagorici è stato chiamato *nozze*, perchè, come abbiamo già avvertito, esso risulta dal maschio unito alla femmina (*item a Pythagoricis nuptiae dictae quod mare et foemina constet*).

F. — (Del numero *sei* — *De senario*). — Il numero sei è il solo dei numeri che stanno fra uno e dieci, il quale risulti dalla somma delle sue parti aliquote (numero perfetto) e infatti $1 + 2 + 3 = 6$. È numero sferico o circolare come il numero cinque. Fra i numeri pari è il primo numero parimente impari. — Dai Pitagorici è stato chiamato ἀῤῥενοθηλὺς, perchè risulta dal *tre* preso *due* volte e conseguen-

temente in potenza è maschio e femmina. Anche questo numero viene chiamato *nozze*, perchè è uguale alla somma di tutte le sue parti aliquote e perchè, come è stato affermato da Macrobio (1), nel parto umano è arbitro della maturità *(nuptiae et hic dictus, quod suis partibus aequalis sit et in partu humano arbiter maturitatis, ut a Macrobio dictum est)*.

G. — (Del numero *sette* — *De septenario*) — Questo numero nè genera nè è generato da alcuno dei numeri della serie da uno a dieci, fatta eccezione per l' unità; per questo dai Pitagorici è stato chiamato *ἀμητρος*, cioè *senza madre*. Così il 6 (per moltiplicazione) è generato dal 3 e dal 2; il 5 non è generato, ma genera (moltiplicato per 2) il 10, che a sua volta è generato dal 2 e dal 5; il 3 produce (per moltiplicazione) il 6 e il 9. In una parola non vi è che il sette, il quale non generi o non sia generato da qualche altro numero compreso fra l'uno e il dieci e si possa comporre solamente con la riunione (somma) di semplici unità (*adeo nullus praeter 7 est, quin aut gignat aut gignatur, sed a solis unitatibus colligitur*).

---

(1) Questo *Macrobio* che dal nostro A. in quest' opera è stato citato varie altre volte è *Macrobio Ambrosio Teodoro*, grammatico Romano, il quale fiorì intorno al 430 d. C. — Scrisse: *Commentarii in Ciceronis Somnium Scipionis* e *Convivia Saturnalia*.

L' A. dopo avere ricordato alcune altre maravigliose proprietà mediche ed astrologiche del numero sette, tratte da Ipocrate, da Macrobio e da altri, chiude questo paragrafo avvertendo che Platone nel Timeo scrisse che l' anima constava di questo numero (*Plato in Timaeo ex hoc numero animam constare scripsit*).

H. — (Del numero *otto* — *De octonario)* — È il primo numero cubo; la sua radice è due. Il numero otto da alcuni è chiamato *base*, perchè il cubo, corpo conterminato da sei facce uguali, in qualunque modo cada assumerà una stabilità perfetta; di qui il proverbio *ἀπαντοκτώ* (cioè: *tutte le cose otto*) che Erasmo di Rotterdam (1) crede abbia tratto origine dalla forma del sepolcro nel quale è stata riposta la salma del poeta Stesicoro (2), mentre altri stimano piuttosto doversene ascrivere la paternità ad Eratostene, il quale afferma che tutte le cose che circondano la terra sono otto (*alij malunt ad Eratosthenem referre, qui ait cuncta quae terram ambiant, esse octo*).

---

(1) *Erasmo Desiderio* (1467-1536) fu celebre umanista e scrisse pregevoli satire contro frati e scolastici *(Encomium moriae* — Elogio della follia) — La migliore edizione delle sue opere è quella di Le Clerc (1703-1706) in 11 volumi.

(2) *Stesicoro* di Imera (Sicilia) lirico greco visse circa 600 anni a. Cr. e morì a Catania.

I. — (Del numero *nove* — *De enneade*) — In primo luogo l' A. ricorda la proprietà che ha il numero 9 di essere il primo quadrato del primo numero dispari. Avverte che questo numero è stato anche chiamato *Thelesphorus* (quello che porta a compimento), perchè col nono mese il feto nell'utero materno raggiunge la perfezione. Osserva che i rapporti dei suoni sono contenuti in questo numero, per la qual cosa esso è sacro alle muse (*rationes consonantiarum omnes intra hunc numerum concluduntur, quare et musis sacer*).

E questo paragrafo termina appunto con alcune pratiche esplicazioni date dall' A. intorno ai rapporti dei suoni.

K. — (Del numero *dieci* — *De denario*) — Il numero dieci, l' ultimo della serie, è il generatore di tutti quanti i numeri (*numerorum consummatio*). Infatti in esso coesistono tutti quanti i possibili numeri, perchè pervenuti al numero dieci, ripetendo insieme con esso un numero inferiore al dieci, generiamo un qualsivoglia numero nuovo, come 12, 47,90, 324, ecc. Aristotele lasciò scritto che questo avveniva presso tutti gli uomini, perchè vi erano condotti da una certa legge di natura (*idque ab omnibus gentibus naturae quadam lege admonitis fieri, Aristoteles in problematis tradidit.* — L' A. termina questo decimo capitolo, ed insieme questo se-

condo ed ultimo libro, ricordando che Erodoto (1) afferma che i Frigi solamente una volta incominciavano a ripetere i numeri dal sette, chiamato per questa ragione *fortitudo* ed anche *consummatio*. (*Herodatus author est Phriges solos olim a septenario numerum reflectere, vocatur autem fortitudo hic numerus et consummatio, quoniam omnem numerum perficit*).

Osservazione generale.

Anche in questo secondo libro l'attento lettore avrà potuto rilevare i pregi e i difetti che già abbiamo notato nel primo. Le nozioni dell'*Aritmetica propriamente detta*, che certo con frase superiore al merito il nostro A. chiama *Teoria o Dottrina dei numeri*, vi si riducono ad una ben povera cosa, quando specialmente si raffrontino con tutto quello che intorno alla scienza dei numeri ci lasciò scritto l'immortale Euclide nei libri VII, VIII, IX e X dei suoi pregevoli Elementi, nei quali quattro libri stanno per davvero i germi fecondi della *teoria dei numeri* che, come è stato detto altra volta, raggiunse il mas-

---

(1) *Erodoto* di Alicarnasso visse circa dal 500 al 424 a. Cr. Fu detto il padre della Storia. La sua opera, scritta in dialetto jonico, comprende in 9 libri la Storia dell'Oriente e della Grecia, specialmente le guerre Persiane fino al 479.

simo grado di sviluppo e di splendore sul finire del secolo XVIII e nel principio del secolo XIX.

Il Noviomago usa sempre però una varia genialità di esposizione e mostra, sotto il riguardo didattico, una cura affettuosa per gli scolari, a cui è rivolta la sua modesta parola, contemperando la severità della disciplina professata con più o meno opportune digressioni nel campo della filosofia, della storia, delle lettere e delle arti. Ma egli, come nel libro primo, afferma senza dimostrare, segue le orme lasciate da Pitagora e da Teone Smirneo ed abbandona le tracce luminose segnate da Euclide e da Archimede, usa ed abusa di scolastiche distinzioni, destinate piuttosto a confondere insieme, che a schiarire, i primitivi elementari concetti della scienza e ricorda finalmente quelle mistiche facoltà dei numeri, quelle loro particolari virtù frequentemente ultranaturali, di cui mal si saprebbero spiegare le recondite ragioni costantemente ravvolte nel mistero.

Tale del resto era il sistema universalmente seguito, in occidente, nell'insegnamento, all'epoca in cui fu pubblicato il libro che attrasse la mia naturale curiosità, libro che, quale modesto contributo alla Storia della Matematica e per lumeggiare un caratteristico periodo scientifico, ho voluto con intelletto d'amore volgarizzare ed illustrare.

Finito di stampare
il giorno 15 Luglio 1901 — Pavia